Dokazi

Konstrukcije:
- like konstruiramo z ravnilom in šestilom
- računamo števke števila π
- konstruiramo elemente množice, npr. $(42, in, 3) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$

Cilj: izjava, ki jo trenutno dokazujemo

Kontekst: spremenljivke, predpostavke, definicije/okrajšava in že dokazana dejstva, ki so trenutno na voljo

Primer: p, q, r izjave

$$(p \vee q) \wedge r \Rightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vpeljava spremenljivke:

"Naj bo $x \in A$."

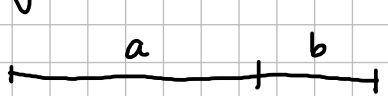
↓ lahko uporabljamo x
Vemo le to, da je $x \in A$.

"Naj bo $\cos \in \mathbb{N}$."

Vpeljava predpostavke:

"Predpostavimo p."

↓ se pretvarjamo, da velja p.
p smemo uporabiti, not da velja



$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Okrajšave:

"Naj bo $x := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$."

↓ smemo uporabljati x
in dejstvo, da je x enak $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

to lahko naredimo kadarkoli

Izpeljava dejstva:

"Zaradi .... velja p."

↓ smemo uporabljati p

to lahko naredimo kadarkoli

Pravila sklepanja:

- pravila za logične operacije
  - vpeljava : kako dokažemo cilj
  - uporaba : kako uporabimo predpostavko ali izpeljano dejstvo
- pravila za enakost
- izključena tretja možnost

Uporaba $\forall$:

velja $\forall x \in \mathbb{R}.\ (x+1)^2 \geq 0$

↳ uporaba: $(\ln \sqrt[3]{7} + 1)^2 \geq 0$

$\ln \sqrt[3]{7} \in \mathbb{R}$?

Naj bo $a \in \mathbb{R}$.

⋮

17 Velja $\forall x \in \mathbb{R}.\ (x+1)^2 \geq 0$

Zaradi (17) velja $((a+3)^4 + 1)^2 \geq 0$ ($(a+3)^4 \in \mathbb{R}$)

Vpeljava $\exists$:

Dokažimo $\exists k \in \mathbb{N}.\ k^2 + 7 < 17$.

Podamo $k := 1$.

!

⋮

Naj bo $a \in \mathbb{N}$.

⋮

Dokažimo $\exists k \in \mathbb{N} . \; a + k \geq 3a + 7$.

Podamo $k := 16a + 80$.

- $16a + 80 \in \mathbb{N}$? ✓
- pravimo $a + (16a + 80) \geq 3a + 7$

$17a + 80 \geq 3a + 7$

$14a + 73 \geq 0$

to vejo še otroci v vrtcu

· Uporaba ∃:

k velja $\exists x \in A . \phi(x)$

⋮

Dokažimo ρ.

Zaradi (k) imamo $x \in A$, za katerega velja $\phi(x)$.

… ⟨dokaz ρ⟩ …

uvedli smo spremenljivko x

predpostavili smo $\varphi(x)$.

Izključena tretja možnost:

Za vsako izjavo velja $\varphi \vee \neg\varphi$.

Primer: Dokaži $\forall x \in \mathbb{R} . \; |x + 2| \geq x$.

Naj bo $x \in \mathbb{R}$.

Dokažimo $|x + 2| \geq x$.

Ker velja $x + 2 \leq 0$ ali $\neg(x + 2 \leq 0)$, obravnavamo primera:

1) predpostavimo $x + 2 \leq 0$:

$|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$?

⋮

2) predpostavimo $\neg(x + 2 \leq 0)$, kar je ekvivalentno $x + 2 > 0$

$|x + 2| = x + 2$? ...

Pravilo enakosti: enake izraze lahko zamenjamo:

Če je $a = b$, smemo a zamenjati z b.

Pravilo ekvivalence:

Če je $p \Leftrightarrow q$, smemo p zamenjati s q.