Naloga 5.30

Na $\mathbb{R}^2$ definiramo

$$(x,y) \sqsubseteq (z,w) \;:\Leftrightarrow\; y \leq w \text{ in } x-y \leq z-w.$$

(a) Pokažite, da je $\sqsubseteq$ delna urejenost.
(b) Ali je linearna urejenost?
(c) Poiščite neskončno množico $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ki ima prvi element.
(d) Dokažite, da je $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$ mreža.
(e) Ali je $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ z zožitvijo $\sqsubseteq$ mreža?

Rešitev:

(a)

- refleksivnost:

$$(x,y) \sqsubseteq (x,y) \Leftrightarrow$$
$$y \leq y \text{ in } x-y \leq x-y \Leftrightarrow$$
$$T \text{ in } T \Leftrightarrow$$
$$T$$

- tranzitivnost:

- predpostavimo $(x,y) \sqsubseteq (z,w)$ in $(z,w) \sqsubseteq (s,t)$.
- dokazujemo $(x,y) \sqsubseteq (s,t) \Leftrightarrow$

$$y \leq t \text{ in } x-y \leq s-t$$

Iz $(x,y) \sqsubseteq (z,w)$ sledi $y \le w$ in $x-y \le z-w$

Iz $(z,w) \sqsubseteq (s,t)$ sledi $\underbrace{w \le t}_{\Rightarrow\, y \le t}$ in $\underbrace{z-w \le s-t}_{\Rightarrow\, x-y \le s-t}$.

(Uporabili smo tranzitivnost $\le$)

$\underbrace{}_{(x,y) \sqsubseteq (s,t)}$

- antisimetričnost:

predpostavimo $(x,y) \sqsubseteq (z,w)$ in $(z,w) \sqsubseteq (x,y)$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$y \le w$ in $x-y \le z-w$ $\qquad$ $w \le y$ in $z-w \le x-y$

Iz antisimetričnosti $\le$ sledi

$$y = w \quad \text{in} \quad x-y = z-w$$

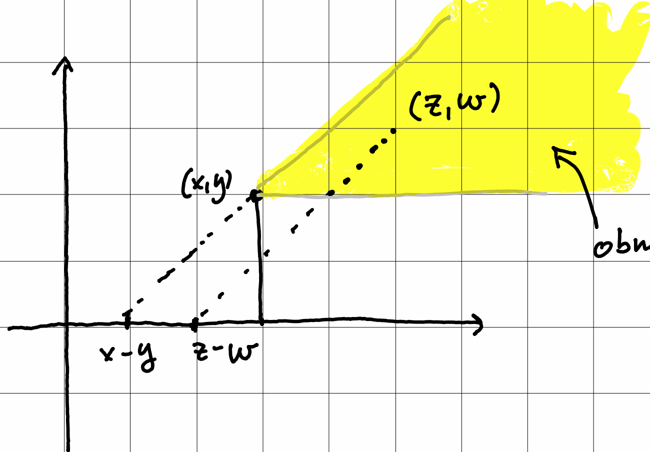
Dokazati moramo še $x = z$:

$x - y = z - w \Rightarrow$ (ker $y = w$)

$x - w = z - w \Rightarrow$

$x = z$.

(b) Najprej skicirajmo območje vseh točk, ki so večje od (x,y).



$x-y \leq z-w$

območje nad (x,y)

Odgovor: $\sqsubseteq$ ni linearna ureditev, ker

$$(0,0) \not\sqsubseteq (0,1) \quad \text{in} \quad (0,1) \not\sqsubseteq (0,0)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$0 \leq 1 \wedge 0-0 \leq 0-1 \qquad 1 \leq 0 \wedge 0-1 \leq 0-0$$

$$\top \wedge \bot \qquad\qquad \bot \wedge \top$$

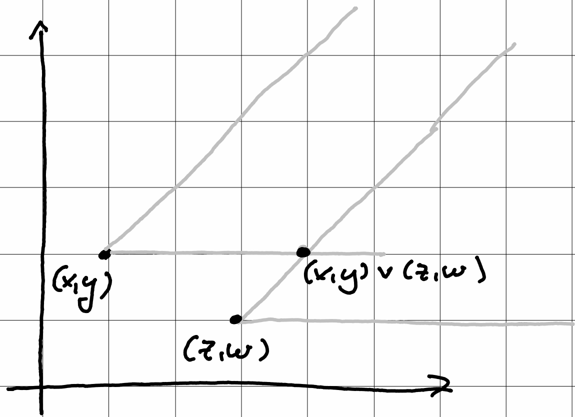
$$\bot \qquad\qquad \bot$$

(c) Definirajmo $\uparrow(x,y) := \{(z,w) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \sqsubseteq (z,w)\}$

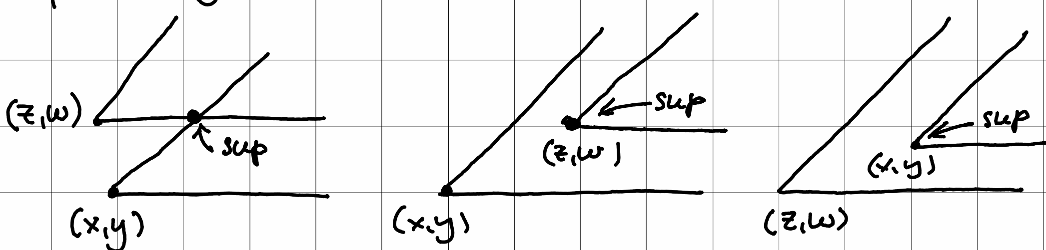
Prvi element $\uparrow(x,y)$ je (x,y).

Množica $\uparrow(x,y)$ je neskončna, ker je to območje označeno na zgornji sliki.

(d) Najprej ugotovimo, kako se izračuna $(x,y) \vee (z,w)$ na sliki

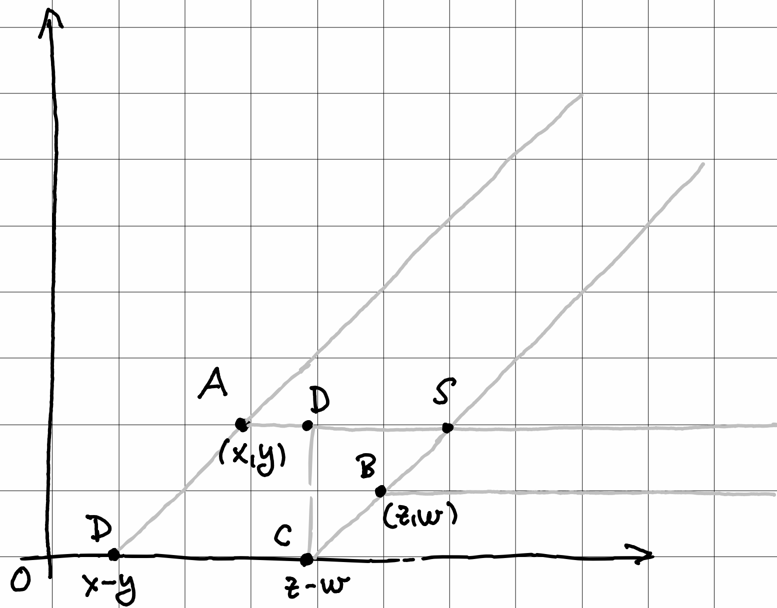


Vidimo, da se supremum dobi tako, da tvorimo paralelogram, a imamo več možnosti:



Izogniti se želimo obravnavi vseh teh primerov. Potrebujemo *eno* formulo, ki deluje v *vseh* primerih.

Poiščemo jo tako, da obravnavamo en primer, izrazimo koordinate supremuma za ta primer, nato pa preverimo, da deluje v splošnem.



$A=(x,y)$ $\quad B=(z,w)$ $\quad S$ = supremum A in B.

Iščemo koordinate S, izražene z x, y, z, w.

$S=(x_s, y_s)$ zapisati želimo x_s in y_s tako, da bo zapis deloval tudi, če premikamo A in B.

$$y_s := \max(y, w)$$

$$x_s := \max(|OD|, |OC|) + y_s$$
$$= \max(x-y, z-w) + \max(y, w)$$

Imamo formulo:

$$(x,y) \vee (z,w) := (\underbrace{\max(x-z, y-w)}_{a} + \underbrace{\max(y,w)}_{b}, \underbrace{\max(y,w)}_{b})$$

Preverimo, da je to res supremum:

1) je zgornja meja za (x,y) in (z,w):

$(x,y) \sqsubseteq (a+b, b)$ $\iff$

$y \leq b$ in $x-y \leq (a+b)-b$ $\iff$

$y \leq \max(y,w)$ in $x-y \leq \max(x-z, y-w)$ $\iff$

T in T

T ✓

Podobno velja $(z,w) \sqsubseteq (a+b, b)$

2) je najmanjša zgornja meja:

denimo, da velja

$(x,y) \sqsubseteq (u,v)$ in $(z,w) \sqsubseteq (u,v)$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\underset{(1)}{y \leq v}$ in $\underset{(2)}{x-y \leq u-v}$ $\quad$ $\underset{(3)}{w \leq v}$ in $\underset{(4)}{z-w \leq u-v}$

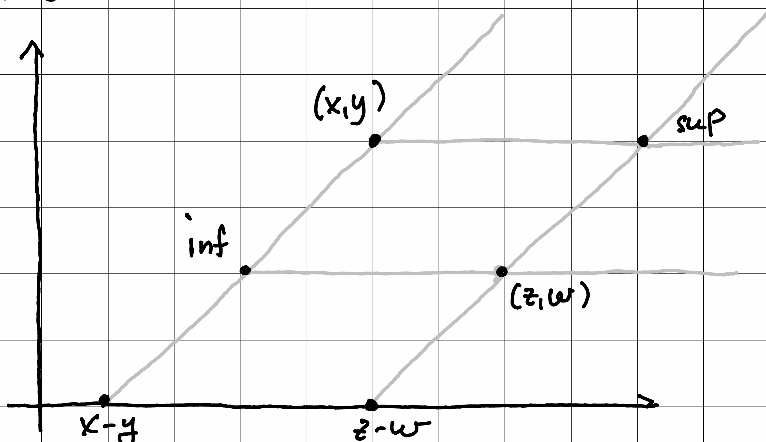
Iz (1) in (3) sledi $\max(y,w) \leq v$.

Iz (2) in (4) sledi $\max(x-y, z-w) \leq u-v$

Torej velja $b \leq v$ in $(a+b)-b \leq u-v$, torej

$$(a+b, b) \sqsubseteq (u,v).$$

Sedaj je treba ugotoviti še, kako računamo infimum:



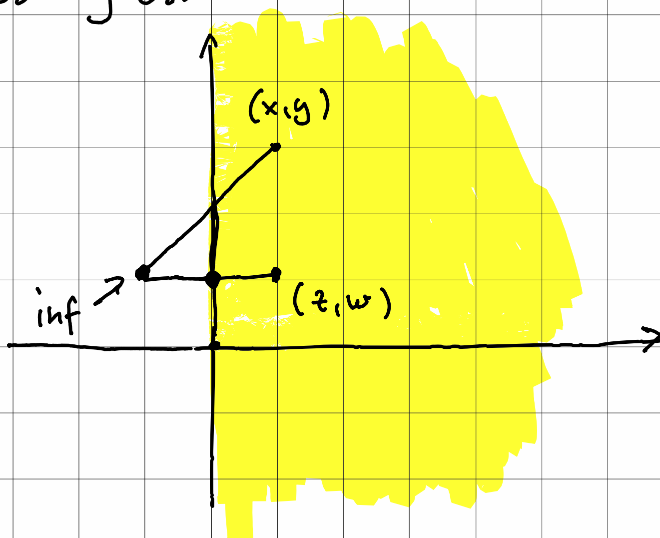
$(x,y) \wedge (z,w) :=$

$$(\min(x-y, z-w) + \min(y,w),\ \min(y,w))$$

Preverjanje, da ta formula deluje, je analogno primeru $(x,y) \vee (z,w)$.

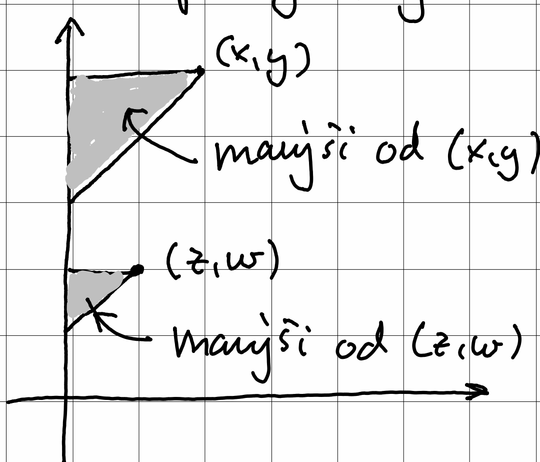
(e) Ali je $\sqsubseteq$ zožena na $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ mreža?

Na prvi pogled to ni res, ker je lahko infimum točk, ki sta desno od y osi levo od y osi:



A pozor, lahko se zgodi, da je kaka druga točka novi infimum!

Narišimo spodnje meje:



Ker se območji spodnjih mej ne sekata vedno, sumimo, da
$([0,\infty)\times\mathbb{R}, \sqsubseteq)$ <u>ni</u> mreža.

Kontraprimer:
trdimo, da $(0,0)$ in $(0,1)$ nimata skupne spodnje meje v $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ in torej nimata infimuma.

Recimo, da je

$(s,t)\sqsubseteq(0,0)$ in $(s,t)\sqsubseteq(0,1)$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$t\leq 0$ in $s-t\leq 0$ $\qquad$ $t\leq 1$ in $s-t\leq -1$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$t\leq 0$ in $s\leq t$ (1) $\qquad$ $t\leq 1$ in $s\leq t-1$ (2)

$$\begin{aligned} s &\leq t-1 && \text{zaradi (2)}\\ &\leq 0-1 && \text{zaradi (1)}\\ &\leq -1 \end{aligned}$$

Torej $(s,t)\notin[0,\infty)\times\mathbb{R}$