Logika in množice, 2. kolokvij
13. januar 2022

1. naloga (25 točk)

Na množici $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$m\,R\,n \;:\Longleftrightarrow\; m^2 \mid n.$$

Z besedami: m je v relaciji z n, kadar m^2 deli n.

a) (10 točk) Predstavite relacijo R z usmerjenim grafom.

b) (15 točk) Katere od naslednjih lastnosti ima R? Odgovorov ni treba utemeljiti.

refleksivna:	DA	NE
irefleksivna:	DA	NE
simetrična:	DA	NE
antisimetrična:	DA	NE
tranzitivna:	DA	NE

2. naloga (25 točk)

Naj bo A množica in $f\colon A \to A$ preslikava. Za podmnožico $S \subseteq A$ rečemo, da je f-***invariantna***, kadar velja $f_*(S) \subseteq S$.
Dokažite naslednji trditvi.

a) (10 točk) Za vsak $S \subseteq A$ velja $f_*(f^*(S)) \subseteq S \subseteq f^*(f_*(S))$.

b) (15 točk) Če je $S \subseteq A$ f-invariantna, sta f-invariantni tudi $f_*(S)$ in $f^*(S)$.

3. naloga (25 točk)

Preverite naslednji enakosti.

a) (15 točk) $\left|\mathbb{N} \times \mathbb{R}\right| = \left|\mathbb{R}\right|$

b) (10 točk) $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = \left|\mathcal{P}(\mathbb{R})\right|$

4. naloga (25 točk)

Naj bo $(P,<)$ dobra ureditev. Za podmnožico $S \subseteq P$ pravimo, da je:

- ***dolnja***, kadar velja $\forall x,y \in P\,.\, x < y \land y \in S \Rightarrow x \in S$,
- ***gornja***, kadar velja $\forall x,y \in P\,.\, x \in S \land x < y \Rightarrow y \in S$.

a) (15 točk) Ali smemo sklepati, da je množica $\{S \subseteq P \mid S \text{ je dolnja}\}$, urejena z relacijo „prava podmnožica“ $\subset$, dobra ureditev?

b) (10 točk) Ali smemo sklepati, da je množica $\{S \subseteq P \mid S \text{ je gornja}\}$, urejena z relacijo $\subset$, dobra ureditev?

2. naloga:

a) Naj bo $S \subseteq A$.

Dokazujemo $f_*(f^*(S)) \subseteq S$.

Naj bo $x \in f_*(f^*(S))$. Dokazujemo $x \in S$.

Obstaja $y \in f^*(S)$, da je $x = f(y)$. 1

$$\Updownarrow$$

$f(y) \in S$ 2

Iz 1 in 2 sledi $x \in S$.

Dokazujemo $S \subseteq f^*(f_*(S))$.

Naj bo $x \in S$. Dokazujemo $x \in f^*(f_*(S))$.

$$\Updownarrow$$

$f(x) \in f_*(S)$. 3

3 Velja, saj je $f_*(S) = \{ f(y) \mid y \in S \}$,

torej $f(x) \in f_*(S)$, saj je $x \in S$.

b) Naj bo $S \subseteq A$ in $f_*(S) \subseteq S$. 4

Dokazujemo $f_*(f_*(S)) \subseteq f_*(S)$.

To sledi iz 4 in dejstva, da je f_* monotona glede na $\subseteq$ (ali smo to naredili v šoli?).

Dokažimo $f_*(f^*(S)) \subseteq f^*(S)$:

$$f_*(f^*(S)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zaradi (a)}}}{\subseteq} f^*(f_*(S)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ker velja } f_*(S) \subseteq S \\ \text{in je } f^* \text{ monotona za } \subseteq.}}{\subseteq} f^*(S)$$

3. naloga:

(a) Dokažimo $|\mathbb{N} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Uporabimo Cantor-Schröder-Bernsteinov izrek:

(a.1) Dokažimo $|\mathbb{N} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}|$.

Iščemo injektivno preslikavo $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Naj bo $b: \mathbb{R} \to (0,1)$ katerakoli bijekcija, na primer $b(x) := \frac{2}{\pi} \cdot \arctan x$.

Podamo $f(n,x) := 2n + b(x)$.

Preverimo, da je f injektivna:

$$f(m,x) = f(n,y) \Leftrightarrow$$
$$2m + b(x) = 2n + b(y) \Leftrightarrow$$
$$2(m-n) = b(y) - b(x) \Rightarrow$$

$$2(m-n) = b(y) - b(x) \leq 1 - 0 = 1 \Rightarrow$$
$$m - n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{m = n} \text{ ker } m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$b(x) = b(y) \Rightarrow x = y \text{ ker } b \text{ injektivna.}$$

(a.2) Dokažimo $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{R}|$.

Podajmo injektivno $g: \mathbb{R} \to \mathbb{N} \times \mathbb{R}$:

$$g(x) := (42, x)$$

Preverimo, da je g injektivna:

$$g(x) = g(y) \Rightarrow$$
$$(42, x) = (42, y) \Rightarrow$$
$$42 = 42 \wedge x = y \Rightarrow$$
$$x = y.$$

(b)

$$|P(\mathbb{R})| \underset{\text{predavanja}}{=} |2^{\mathbb{R}}| \underset{(a)}{=} |2^{\mathbb{N} \times \mathbb{R}}| \underset{A^{B \times C} \cong (A^B)^C}{=} |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}}| \underset{\substack{2^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R} \\ \text{vaje}}}{=} |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$$