Logika in množice, 2. kolokvij
2. julij 2021

1. naloga (25 točk)

Naj bo V tromestni izjavni veznik, definiran kot $V(p,q,r) := (p+q) \Rightarrow r$.

a) (10 točk) Zapišite resničnostno tabelo veznika V.

b) (5 točk) Ali je $\{V\}$ poln nabor izjavnih veznikov? Odgovor utemeljite.

c) (10 točk) Ali je naslednji sklep veljaven? Če je, ga dokažite, če ne, pa podajte protiprimer.

$$V(p,q,q), \neg q \models \neg p$$

2. naloga (25 točk)

Na množici $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}.$$

a) (15 točk) Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na P.

b) (10 točk) Dokažite, da je naslednja preslikava dobro definirana:

$$\begin{aligned} f\colon P/_{\sim} &\to (0,\pi) \\ [z]_{\sim} &\mapsto \arg(z) \end{aligned}$$

Spomnimo: $\arg(z)$ označuje argument kompleksnega števila z, tj. kot iz polarnega zapisa kompleksnega števila z.

3. naloga (25 točk)

Dokažite, da sta naslednji množici neštevni.

a) (10 točk) Množica vseh zaporedij racionalnih števil $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

b) (15 točk) Množica vseh padajočih Cauchyjevih zaporedij racionalnih števil $\mathrm{PC}_{\mathbb{Q}}$.

Spomnimo: zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjevo, kadar za vsako pozitivno realno število ϵ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $m,n \in \mathbb{N}$, ki so večji od N, velja $|a_m - a_n| < \epsilon$.

4. naloga (25 točk)

Za preslikavo $f\colon A \to B$ med delnima urejenostma $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$ rečemo, da je

- ***monotona***, kadar velja $\forall x, y \in A. \big(x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)\big)$,
- ***vložitev delnih urejenosti***, kadar velja $\forall x, y \in A. \big(x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y)\big)$.

Naj bo $(X, \leq)$ delna urejenost in naj bo potenčna množica $\mathcal{P}(X)$ delno urejena z $\subseteq$. Preslikava $I\colon X \to \mathcal{P}(X)$ naj bo definirana kot $I(x) := \{z \in X \mid z \leq x\}$.

a) (10 točk) Preverite, da je I vložitev delnih urejenosti.

b) (15 točk) Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni.

1. Vsaka podmnožica množice X ima supremum v $(X, \leq)$.
2. Obstaja monotona preslikava $s\colon \mathcal{P}(X) \to X$, za katero velja $s \circ I = \mathrm{id}_X$.

2. naloga

(a) Dokažujemo, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija:

- refleksivna:

  $z \in P, \quad \frac{z}{z} = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow z \sim z$

- simetrična:

  $z, w \in P$ in $z \sim w$:

  Tedaj je $\frac{z}{w} \in \mathbb{R}$ in $\frac{z}{w} \neq 0$ ker $z \neq 0$,

  torej $\frac{w}{z} = \left(\frac{z}{w}\right)^{-1} \in \mathbb{R}$

- tranzitivna:

  $z, w, t \in P$ in $z \sim w$ in $w \sim t$:

  $$\frac{z}{t} = \frac{z}{w} \cdot \frac{w}{t} \in \mathbb{R} \text{ ker } \frac{z}{w} \in \mathbb{R} \text{ in } \frac{w}{t} \in \mathbb{R}.$$

(b) Preverimo, da je $f : P/\sim \to (0, \pi)$, dobro def.

$$f : [z]_\sim \to \arg z$$

Vemo, da lahko vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ enolično zapišemo v polarni obliki $z = r \cdot e^{i\varphi}$ za $r > 0$ in $\varphi \in [0, 2\pi)$. Velja $\arg z = \varphi$.

Če je $\operatorname{Im}(z) > 0$, velja $\varphi \in (0, \pi)$.

Denimo, da imamo $z, w \in P$ in

$$z = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, \quad w = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

Če je $z \sim w$, potem velja

$$\frac{z}{w} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$\Rightarrow$ obstaja $k \in \mathbb{Z}$, da je

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi \cdot k.$$

Ker velja $0 < \varphi_1, \varphi_2 < \pi$, sledi

$$-\pi < \varphi_1 - \varphi_2 < \pi$$

$$-\pi < \pi \cdot k < \pi$$

$$-1 < k < 1$$

Torej je $k = 0$ in $\varphi_1 = \varphi_2$.

Od tod sledi $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} w$ in

f je res dobro definirana.

3. naloga

(a) Vemo, da je $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ neštevna, torej je neštevna tudi $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, saj je
$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}.$$

(b) Definirajmo injektivno preslikavo
$$f : \{1,2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow PC_{\mathbb{Q}}$$
s predpisom
$$f(a)(k) = -\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 4^{-i}$$
Očitno velja, da je $f(a)(k) \in \mathbb{Q}$ in da je $f(a)$ padajoče zaporedje, saj je
$$f(a)(k+1) = f(a)(k) - a_{k+1} \cdot 4^{-k-1}$$
$$< f(a)(k).$$
Poleg tega je $f(a)$ Cauchyevo zaporedje, saj konvergira: $\lim_{k\to\infty} f(a)(k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 4^{-i}$.

Preveriti moramo, še da je f injektivna preslikava.

Denimo da za $a, b \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ velja

$$f(a) = f(b).$$

Z indukcijo na $n \in \mathbb{N}$ pokažimo, da velja $a_n = b_n$:

- baza: $f(a)(0) = f(b)(0) \Rightarrow$

$$a_0 \cdot 4^0 = b_0 \cdot 4^0 \Rightarrow$$

$$a_0 = b_0$$

- denimo, da za vse $i < m$ velja $a_i = b_i$.

Tedaj:

$$f(a)(m) = f(b)(m) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 4^{-i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot 4^{-i} \Rightarrow$$

$$a_m \cdot 4^{-m} = b_m \cdot 4^{-m} \Rightarrow$$

$$a_m = b_m.$$

Ker velja $|\{1,2\}^{\mathbb{N}}| \leq |PC_{\mathbb{Q}}|$ in je $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ neštevna, je tudi $PC_{\mathbb{Q}}$ neštevna.

4. naloga

(a) Naj bosta $x, y \in X$

Dokažimo $x \leq y \Rightarrow I(x) \subseteq I(y)$:

predpostavimo $x \leq y$,

naj bo $z \in I(x)$,

dokazujemo $z \in I(y)$:

ker $z \in I(x)$, velja $z \leq x$,

torej $z \leq x \leq y$ in $z \in I(y)$.

Dokažimo $I(x) \subseteq I(y) \Rightarrow x \leq y$:

ker $x \in I(x) \subseteq I(y)$, sledi $x \in I(y)$ in

$x \leq y$ po definiciji I.

(b)

(1) $\Rightarrow$ (2):

Definiramo $s : P(X) \to X$

$$s(U) = \sup U.$$

Preslikava s je dobro definirana zaradi (1).

Je monotona, ker je sup monoton.

Naj bo $x \in A$. Tedaj je $x = \max I(x) = \sup I(x)$,

torej $s(I(x)) = x$. Sledi $s \circ I = id_X$.