Logika in množice, 2. kolokvij
16. januar 2020

RESITVE
Ime in priimek

Sedež (2.01)

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- **Ne odpirajte te pole**, dokler ne dobite dovoljenja.
- **Preden začnete reševati test:**
  - Vpišite svoje podatke na testno polo z velikimi tiskanimi črkami.
  - V shemi predavalnice desno zgoraj pobarvajte krog, ki označuje vaš sedež.
  - Na vidno mesto položite osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico.
  - Preverite, da imate mobitel izklopljen in spravljen v torbi.
- Dovoljeni pripomočki: pisalo, brisalo in poljubno pisno gradivo.
- Rešitve pišite neposredno na testno polo. Odgovore utemeljite.
- Če kaj potrebujete, prosite asistenta, ne sosedov.
- **Med izpitom ne zapuščajte svojega mesta** brez dovoljenja.
- Testna pola vam bo odvzeta **brez nadaljnjih opozoril**, če:
  - komunicirate s komerkoli, razen z asistentom,
  - komu podate kak predmet ali list papirja,
  - odrinete svoje rešitve na stran, da jih lahko vidi kdo drug,
  - na kak drug način prepisujete ali pomagate komu prepisovati,
  - imate na vidnem mestu mobitel ali druge elektronske naprave.
- **Ob koncu izpita:**
  - Ko asistent razglasi konec izpita, **takoj** zaprite testno polo.
  - **Ne vstajajte**, ampak počakajte, da asistent pobere **vse** testne pole.
  - **Testno polo morate nujno oddati.**
- Čas pisanja je 120 minut. Na tabli je zapisano, do kdaj imate čas.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Na množici $A = \{a, b, c, d, e\}$ je dana relacija

$$R = \{(a, b), (a, d), (b, d), (c, d)\}.$$

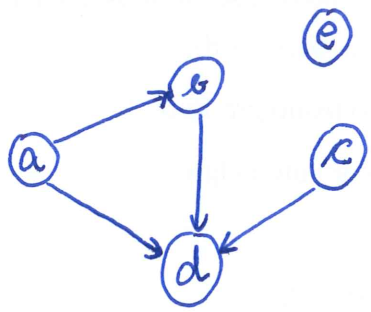
a) (4 točke) Narišite sliko relacije R kot usmerjeni graf.

b) (16 točk) Katere lastnosti ima R? Odgovorov ni treba utemeljiti.

refleksivna:	DA	NE	irefleksivna:	DA	NE
tranzitivna:	DA	NE	asimetrična:	DA	NE
simetrična:	DA	NE	strogo sovisna:	DA	NE
antisimetrična:	DA	NE	sovisna:	DA	NE

c) (5 točk) Naštejte vse pare iz $A \times A$, ki so v relaciji $R \circ R$.

a)



c) $R \circ R = \{(a, d)\}$

(nadaljevanje rešitve 1. naloge)

2. naloga (25 točk)

Na ravnini $\mathbb{R}^2$ je dana ekvivalenčna relacija $\sim$, za katero vemo naslednje: če je razdalja med točkama P in Q enaka 1, potem je $P \sim Q$.

a) (5 točk) Ali velja $(0,0) \sim (2,3)$?

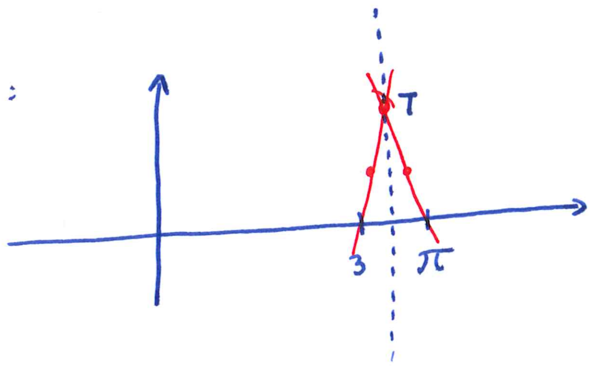
b) (10 točk) Ali velja $(3,0) \sim (\pi,0)$?

c) (10 točk) Koliko ekvivalenčnih razredov ima $\sim$?

a) Da, velja, saj je relacija $\sim$ tranzitivna in velja $(0,0) \sim (0,1) \sim (0,2) \sim (0,3) \sim (1,3) \sim (2,3)$

Opazimo, da sta v relaciji tudi vsaki dve točki, ki sta na celoštevilski razdalji zaradi tranzitivnosti.

b) Da, velja:



Konstruiramo točko T v ravnini na sledeč način:
Poiščemo simetralo daljice med $(3,0)$ in $(\pi,0)$.
Od točk $(3,0)$ in $(\pi,0)$ odmerimo dve enoti na šestilu in narediмо enakokraki trikotnik z osnovnico daljico med $(3,0)$ in $(\pi,0)$ ter krakom dolžine 2.
Točka T je vrh trikotnika.
velja $(3,0) \sim T \sim (\pi,0)$, saj sta točki $(3,0)$ in T ter $(\pi,0)$ in T na celoštevilski razdalji.

c) Imamo le en ekvivalenčni razred, v katerem so vse točke iz ravnine. To pokažemo tako, da dokažemo, da sta vsaki dve točki ekvivalentni.
Naj bosta A in B poljubni točki v ravnini. Narišimo simetralo daljice $\overline{AB}$ in odmerimo enakokrak trikotnik s krakom dolžine $\lceil |AB| \rceil + 1$, ter z osnovnico $\overline{AB}$. Vrh trikotnika je na celoštevilski razdalji

(nadaljevanje rešitve 2. naloge)

od točk A in B. Po tranzitivnosti sta tudi A in B v relaciji.

3. naloga (25 točk)

Dani sta delni urejenosti $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$. Naj bo

$$M = \{f : P \to Q \mid \forall u, v \in P. (u \leq_P v \Rightarrow f(u) \leq_Q f(v))\}$$

množica vseh monotonih preslikav iz P v Q. Na M definiramo relacijo $\preceq$ s predpisom

$$f \preceq g \iff \forall x, y \in P. (x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q g(y)).$$

Dokažite, da je $\preceq$ delna ureditev.

Dokazati moramo, da je relacija $\preceq$ refleksivna, antisimetrična in tranzitivna.

REFLEKSIVNOST: Naj bo f monotona preslikava iz P v Q.

$$f \preceq f \iff \underbrace{\forall x, y \in P. (x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq f(y))}_{\text{to velja, saj je } f \text{ monotona}}$$

Torej je res $f \preceq f$.

ANTISIMETRIČNOST: Naj bosta f in g monotoni preslikavi $P \to Q$.
Predpostavimo, da velja $f \preceq g$ in $g \preceq f$. Dokazujemo $f = g$.
Funkciji sta enaki, kadar imata enake vrednosti po točkah.
Naj bo $x \in P$. Dokazujemo $f(x) = g(x)$.

Ker je P delna urejenost, je refleksivna in zato velja $x \leq_P x$.

Ker je $f \preceq g$ ~~velja~~ in $x \leq_P x$, velja $f(x) \leq_Q g(x)$. (1)

Ker je $g \preceq f$ in $x \leq_P x$, velja $g(x) \leq_Q f(x)$. (2)

Ker je $\leq_Q$ antisimetrična velja $f(x) = g(x)$ po (1) in (2).

TRANZITIVNOST: Naj bodo $f, g, h : P \to Q$ monotone preslikave.
Predpostavimo, da velja $f \preceq g$ in $g \preceq h$. Dokazujemo $f \preceq h$.
Naj bosta $x, y \in P$. Predpostavimo $x \leq_P y$. Dokazujemo $f(x) \leq_Q h(x)$.
Ker $f \preceq g$, velja $f(x) \leq_Q g(y)$. (3)
Ker $g \preceq h$ in $y \leq_P y$ velja $g(y) \leq_Q h(y)$. (4)
Po tranzitivnosti relacije $\leq_Q$ in (3) ter (4) velja $f(x) \leq_Q h(y)$.

(nadaljevanje rešitve 3. naloge)

4. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Podajte primer števno neskončne množice I in družine $A : I \to \mathrm{Set}$, da velja $|A_i \cap A_j| = 1$ za vsaka dva *različna* indeksa $i, j \in I$ ter $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$ za vsake tri *različne* indekse $i, j, k \in I$.

b) (10 točk) Podajte primer števno neskončne množice J in družine $B : J \to \mathrm{Set}$, da velja $|B_i \cap B_j| = 2020$ za vsaka dva *različna* indeksa $i, j \in J$ ter $B_i \cap B_j \cap B_k = \emptyset$ za vsake tri *različne* indekse $i, j, k \in J$. Pri tem smete uporabiti družino A iz prvega dela naloge, tudi če ga niste rešili.

(a) Vzemimo $I := \mathbb{N}$, saj $\mathbb{N}$ je števno neskončna množica.
Definiramo $A : \mathbb{N} \to \mathrm{Set}$ s predpisom

$$A_i := \{ \{i,j\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid j \in \mathbb{N} \}$$

(dvoelementne podmnožice $\mathbb{N}$, ki vsebujejo i)

Za $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, velja $A_m \cap A_n = \{ \{m,n\} \}$, torej $|A_m \cap A_n| = 1$
Za različne $m, n, k \in \mathbb{N}$ velja $A_m \cap A_n \cap A_k = \emptyset$.

(b) Naj bo $A : I \to \mathrm{Set}$ družina iz točke (a).
Tedaj naredimo družino $B : I \to \mathrm{Set}$ s predpisom
$B_i := A_i \times [2020]$.

Tako bo veljalo za $i, j \in I$, $i \neq j$: $B_i \cap B_j = (A_i \cap A_j) \times [2020]$
in torej $|B_i \cap B_j| = 2020$

Za $i, j, k \in I$, različni indeksi, velja

$$\begin{aligned} B_i \cap B_j \cap B_k &= (A_i \cap A_j \cap A_k) \times [2020] \\ &= \emptyset \times [2020] \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

(nadaljevanje rešitve 4. naloge)

(stran za čečkanje in modre misli)