Logika in množice, 2. kolokvij z rešitvami
16. januar 2019

1. naloga (25 točk)

Na množici $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ definiramo delno ureditev $\sqsubseteq$ s predpisom

$$m \sqsubseteq n \iff (m \mid n) \land 2 \mid (m - n).$$

Z besedami: $m \sqsubseteq n$ velja, kadar m deli n ter imata m in n enako parnost. Dejstva, da je to res delna ureditev, ni treba preverjati. Vprašanja se nanašajo na delno urejenost $(P, \sqsubseteq)$. Odgovorov ni treba utemeljevati.

a) (5 točk) Narišite Hassejev diagram relacije $\sqsubseteq$.

b) (5 točk) Zapišite najdaljšo verigo v P.

c) (5 točk) Zapišite vse minimalne elemente P.

d) (5 točk) Poiščite največjo spodnjo in najmanjšo zgornjo mejo podmnožice $\{4, 6\}$.

e) (5 točk) Zapišite kako podmnožico P, ki ima najmanjši element, a nima nobene zgornje meje.

2. naloga (25 točk)

Naj preslikava $Z \colon \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ realni funkciji priredi množico njenih ničel, tj.

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}.$$

a) (7 točk) Izračunajte $Z(x \mapsto x^2 + x - 2)$.

b) (6 točk) Izračunajte prasliko $Z^*(\{\mathbb{R}\})$.

c) (6 točk) Ali je Z injektivna preslikava?

d) (6 točk) Ali je Z surjektivna preslikava?

3. naloga (45 točk)

Naj bo $\triangleleft$ relacija na množici A. Na $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ definiramo relacijo $\sqsubset$ s predpisom

$$X \sqsubset Y \iff \forall a \in X. \forall b \in Y. a \triangleleft b.$$

a) (25 točk) Dokažite, da je $(A, \triangleleft)$ stroga urejenost natanko tedaj, ko je $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \sqsubset)$ stroga urejenost.

b) (10 točk) Naj bo $f\colon A \to A$ strogo monotona preslikava, tj.

$$\forall a, b \in A. a \triangleleft b \Rightarrow f(a) \triangleleft f(b).$$

Dokažite, da je tudi preslikava

$$F : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$$
$$F(X) = f_*(X)$$

strogo monotona za relacijo $\sqsubset$.

c) (10 točk) Naj bo $g\colon A \to A$ strogo monotona **surjektivna** preslikava. Ali smemo sklepati, da je preslikava

$$G : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$$
$$G(X) = g^*(X)$$

strogo monotona za relacijo $\sqsubset$?

Namig: ali obstajajo stroga urejenost $(A, \triangleleft)$, strogo monotona preslikava $g\colon A \to A$ in $x, y \in A$, da velja $g(x) \triangleleft g(y)$ in ne velja $x \triangleleft y$?

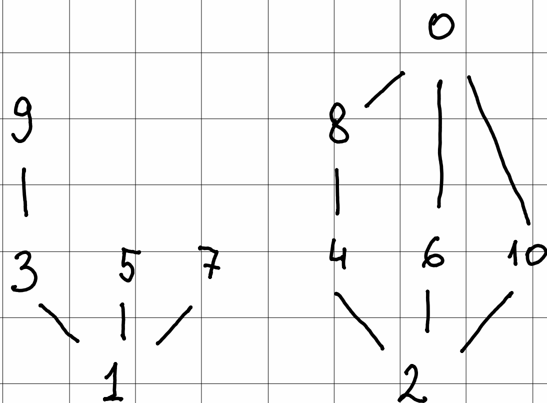
4. naloga (25 točk)

Dokažite: če velja posplošena Cantorjeva hipoteza, potem za vse množice X in Y iz $|X| < |Y|$ sledi $|\mathcal{P}(X)| < |\mathcal{P}(Y)|$.

Nauk: posplošena Cantorjeva hipoteza pravi, da **ne** obstajata neskončni množici A in B, za kateri bi veljalo $|A| < |B| < |P(A)|$.

Naloga 1

(a)



(b) $2 \sqsubseteq 4 \sqsubseteq 8 \sqsubseteq 0$

(c) $1, 2$

(d) $\inf\{4,6\} = 2$ $\sup\{4,6\} = 0$

(e) $\{1, 5, 7\}$

Naloga 2

(a) $Z(x \mapsto x^2+x-2) =$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$1, -2$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x-2=0\} =$

$\{1, -2\}$

(b) $f \in Z^*(\{\mathbb{R}\}) \iff$

$Z(f) \in \{\mathbb{R}\} \iff$

$Z(f) = \mathbb{R} \iff$

$\forall x \in \mathbb{R}.\, f(x) = 0 \iff$

$f = (x \mapsto 0)$

Odgovor: $Z^*(\{\mathbb{R}\}) = \{x \mapsto 0\}$

(c) Z ni injektivna:

$Z(x \mapsto x) = \{0\}$

$Z(x \mapsto 2x) = \{0\}$

vendar $(x \mapsto x) \neq (x \mapsto 2x)$

(d) Z je surjektivna: Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}$. Tedaj velja

$Z(\chi_S) = S$ kjer je $\chi_S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\chi_S = \begin{cases} 0 & x \in S \\ 1 & x \notin S \end{cases}$$

Naloga 3

Najprej opazimo, da velja

$$a \lhd b \Leftrightarrow \{a\} \sqsubset \{b\}$$

To bomo uporabljali v rešitvi brez omembe.

(a) $\boxed{\Rightarrow}$ Denimo, da je $\sqsubset$ stroga.

Dokažimo, da je $\lhd$ stroga:

1) irefleksivnost $\lhd$:

$x \lhd x \Leftrightarrow$

$\{x\} \sqsubset \{x\} \Leftrightarrow$

$\bot$ ker je $\sqsubset$ irefleksivna

2) tranzitivnost:

$x \lhd y \wedge y \lhd z \Leftrightarrow$

$\{x\} \sqsubset \{y\} \wedge \{y\} \sqsubset \{z\} \Rightarrow$ ker je $\sqsubset$ tranzitivna

$\{x\} \sqsubset \{z\} \Leftrightarrow$

$x \lhd z$

$\boxed{\Leftarrow}$ Denimo, da je $\lhd$ stroga.
Dokažimo, da je $\sqsubset$ stroga:

1. Irefleksivnost $\sqsubset$:

   Naj bo $S \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$.
   Torej obstaja neki $x \in S$.
   Velja:
   $$S \sqsubset S \Rightarrow x \lhd x \Leftrightarrow \bot$$ ker $\lhd$ irefleksivna

2. Tranzitivnost $\sqsubset$:

   Naj bodo $S, T, U \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$.
   Denimo, da velja
   $$S \sqsubset T \quad \text{in} \quad T \sqsubset U.$$
   Dokazujemo $S \sqsubset U$.
   Naj bo $x \in S$ in $z \in U$.
   Dokazujemo $x \lhd z$.
   Ker je $T \neq \emptyset$, obstaja $y \in T$.
   Iz $S \sqsubset T$ sledi $x \lhd y$.
   Iz $T \sqsubset U$ sledi $y \lhd z$.
   Sedaj sledi $x \lhd z$, ker je $\lhd$ tranzitivna.

(b) Naj bosta $X, Y \in P(A) \setminus \{\emptyset\}$ in

$$X \sqsubset Y.$$

Dokažimo

$$F(X) \sqsubset F(Y) \quad \Leftrightarrow$$

$$f_*(X) \sqsubset f_*(Y)$$

Naj bo $x \in f_*(X)$ in $y \in f_*(Y)$. Dokažimo

$$x \triangleleft y.$$

Obstaja $a \in X$, da je $f(a) = x$.

Obstaja $b \in Y$, da je $f(b) = y$.

Ker je $X \sqsubset Y$, velja $a \triangleleft b$.

Ker je f monotona, sledi $f(a) \triangleleft f(b) \Leftrightarrow$

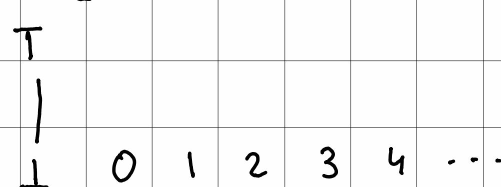
$$x \triangleleft y.$$

(c) Tega ne smemo sklepati. Podajmo protiprimer:

$$A := \mathbb{N} \cup \{\bot, \top\}$$

$$x \triangleleft y \;:\Leftrightarrow\; x = \bot \wedge y = \top$$

Hassejev diagram:



$$g : A \to A$$
$$0 \mapsto \top$$
$$n+1 \mapsto n$$
$$\perp \mapsto \perp$$
$$\top \mapsto \top$$

je surjektivna in strogo monotona.

g^* ni strogo monotona:

$\{\perp\} \sqsubseteq \{\top\}$ in $g^*(\{\perp\}) = \{\perp\} \not\sqsubseteq \{\top, 0\} = g^*(\{\top\})$

Naloga 4

Denimo, da velja $|X| < |Y|$.

Dokazujemo $|P(X)| < |P(Y)|$:

1. Dokažimo $|P(X)| \leq |P(Y)|$.

   Ker $|X| \leq |Y|$, obstaja injektivna $f: X \to Y$.

   Tedaj je $f_*: P(X) \to P(Y)$ tudi injektivna:

   Denimo, da za $S, T \in P(X)$ velja

   $$f_*(S) = f_*(T).$$

   Dokažimo $S \subseteq T$:

   $$\begin{aligned} x \in S &\Rightarrow f(x) \in f_*(S) = f_*(T) \\ &\Rightarrow \text{obstaja } y \in T \text{, da je } f(y) = f(x) \\ &\Rightarrow y = x \text{ ker } f \text{ injektivna} \\ &\Rightarrow x \in T. \end{aligned}$$

   Podobno sledi $T \subseteq S$.

2. Dokažimo $|P(X)| \neq |P(Y)|$.

   Če bi veljalo $|P(X)| = |P(Y)|$, bi imeli

   $$|X| < |Y| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cantorjev izrek}}}{<} |P(Y)| = |P(X)|$$

   kar je v nasprotju s Cantorjevo posplošeno hipotezo.