Naloga 4 (izpit LMN 2019-01-30)

Dokažite, da velja

$$|\mathbb{N} \times P(\mathbb{N}) \times P(P(\mathbb{N}))| = |P(P(\mathbb{N}))|$$

Rešitev:

Uporabimo izrek Cantor-Schröder-Bernstein:

1. Dokažimo $|P(P(\mathbb{N}))| \leq |\mathbb{N} \times P(\mathbb{N}) \times P(P(\mathbb{N}))|$

Bolj splošno velja $|B| \leq |A \times B|$, če $A \neq \emptyset$:
obstaja $x \in A$, podamo injektivno preslikavo

$$f : B \longrightarrow A \times B$$
$$f : y \longmapsto (x, y)$$

Sedaj uporabimo zgornjo opažko z
$B := P(P(\mathbb{N}))$ in $A = \mathbb{N} \times P(\mathbb{N})$

2. Dokažimo $|\mathbb{N} \times P(\mathbb{N}) \times P(P(\mathbb{N}))| \leq |P(P(\mathbb{N}))|$

Uporabili bomo naslednja dejstva:

a) Cantorjev izrek

b) Če $|X| \leq |Y|$, potem $|X \times Z| \leq |Y \times Z|$:

Če je $f: X \to Y$ injektivna, potem je $X \times Z \to Y \times Z$, $(x, z) \mapsto (f(x), z)$ injektivna

c) "Aritmetika množic"

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{N} \times P(\mathbb{N}) \times P(P(\mathbb{N}))| = && \text{ker } P(X) \cong 2^X \\
&|\mathbb{N} \times 2^{\mathbb{N}} \times 2^{2^{\mathbb{N}}}| \leq && \text{ker } |\mathbb{N}| \leq |2^{\mathbb{N}}| \leq |2^{2^{\mathbb{N}}}|, \text{ Cantor} \\
&|2^{2^N} \times 2^{2^N} \times 2^{2^N}| = && \text{ker } X^A \times X^B \cong X^{A+B} \\
&|2^{2^N + 2^N + 2^N}| = && \text{ker } 2^N + 2^N \cong 2 \times 2^N \cong 2^{1+N} \cong 2^N \\
&|2^{2^N}|
\end{aligned}
$$