Aksiomatska teorija množic

Kodiranje z množicami

množice

~~urelementi~~
~~2, 3, 4~~
~~(a, b)~~
~~⋮~~

Ideja: vse objekte predstavimo z množicami

Preslikava: $f : A \to B$ "je" funkcijska relacija $R \subseteq A \times B$

množica

Urejeni par:

$$(x, y)$$

$$\{x, \cancel{y}\} = \{\cancel{y}, x\}$$

Kuratowski: $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

$$\{\{x, 0\}, \{y, 1\}\}$$

$$(1, 0) = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\} = \{\{0, 1\}\} \; ?$$

$$(z, z) = \{\{z\}, \{z, z\}\} = \{\{z\}\}$$

Vsota $A + B \coloneqq (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$

$$\mathrm{in}_1(a) = (0,a) = \{\{0\}, \{0,a\}\}$$
$$\mathrm{in}_2(b) = (1,b) = \{\{1\}, \{1,b\}\}$$

$$(0,1) = \{\{0\}, \{0,1\}\}$$
$$(1,0) = \{\{1\}, \{1,0\}\}$$

Trojica: $(x,y,z) = ((x,y),z) \coloneqq \{\{(x,y)\}, \{(x,y), z\}\}$

$$= \{\{\{\{x\},\{x,y\}\}\}, \{\{\{x\},\{x,y\}\}, z\}\}$$

Standardni enojec $\mathbb{1} = \{()\}$ $\qquad () = \emptyset$

$$\underset{0}{(x}, \underset{1}{y}, \underset{2}{z)} = \{(0,x), (1,y), (2,z)\}$$

Naravna števila:

Standardna končna

$$[n] = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$$

"Število je množica vseh svojih predhodnikov."

$$0 := \{\} = \emptyset$$
$$1 := \{0\} = \{\emptyset\}$$
$$2 := \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$\vdots$$
$$n := \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$m < n \Leftrightarrow m \in n$ $\qquad$ $3 \in 5$ ✓

Cela števila:

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \qquad (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = c+b$

$3_{\mathbb{Z}} := \{ (3,0), (4,1), (5,2), \dots \}$

$-2_{\mathbb{Z}} := \{ (0,2), (1,3), (2,4), \dots \}$

$a-b = c-d$
$a+d = c+b$ $\Updownarrow$

Racionalna števila:

$\mathbb{Q} := \left(\underset{\text{števec}}{\mathbb{Z}} \times \underset{\text{imenovalec}}{(\mathbb{N} \setminus \{0\})} \right) / \sim \qquad (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

$\frac{3}{4} = (3,4)$

$\frac{6}{8} = (6,8)$

$3_{\mathbb{Q}} = \{ (3_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{N}}), (6_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{N}}), \dots \}$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

Realna števila:

$\mathbb{R} :=$ množica Dedekindovih rezov (podmnožice $\mathbb{Q}$)

$3_{\mathbb{R}} := \{ q \in \mathbb{Q} \mid q < 3 \}$

$\sqrt[3]{2}_{\mathbb{R}} := \{ q \in \mathbb{Q} \mid q^3 < 2 \}$

Ordinalna števila:

Definirajmo operacijo "naslednik":

A množica

naslednik $A^+ := A \cup \{A\}$

Primer: $\{2,7\}^+ = \{2, 7, \{2,7\}\}$

$0 := \emptyset$

$1 := 0^+ := \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$

$2 := 1^+ := 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\}$

$\vdots$

$n^+ := \{0, \dots, n-1\} \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n-1, n\}$

$\vdots$

$\omega := \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$

$\omega^+ := \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\} = \omega + 1$

$\omega^{++} := \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega^+\} = \omega + 2$

$\vdots$

$\omega + \omega := \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots\}$

$\omega + \omega + 1$

$\vdots$

α

$\vdots$

Dobro urejena z relacijo $\in$

$3 < 5 \Leftrightarrow 3 \in 5$

Aksiomi ZFC

Zermelo, Fraenkel, Choice (izbira)

varianta

MK

Morse Kelley

① **Ekstenzionalnost:**

$$\forall x,y \in Set.\ (\forall z \in Set.\ z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$$

$\underline{x} \in \underline{A}$

$x \in y$

② **Neurejeni par:**

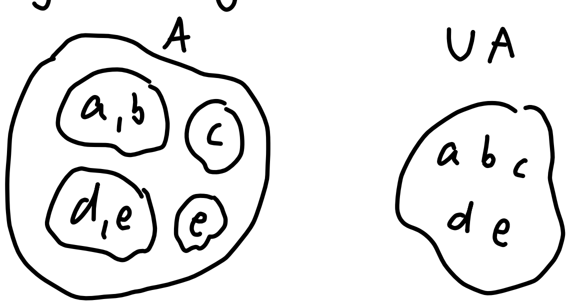
za vsak x in y je $\{x,y\}$ množica, ki vsebuje natanko x in y:

$$\forall x,y,z.\ z \in \{x,y\} \Leftrightarrow z = x \lor z = y$$

Okrajšava: $\{x\} = \{x,x\}$.

③ **Unija:** Za vsako množico A je $\bigcup A$ množica, da velja

$$\forall A,z.\ z \in \bigcup A \Leftrightarrow \exists y \in A.\ z \in y$$



z^{ω} ? e

④ **Prazna množica:** Obstaja množica $\emptyset$, da velja

$$\forall z.\ \neg(z \in \emptyset)$$

5. Neskončna množica:

Obstaja množica, ki vsebuje $\emptyset$ in je zaprta za operacijo naslednik:

$$\exists x.\ \emptyset \in x \wedge \forall y \in x .\ y^+ \in x$$

$$y^+ := y \cup \{y\} = \bigcup \{y, \{y\}\}$$

6. Podmnožica:

Če je A množica in φ izjava, je $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ in

$$\forall z.\ z \in \{x \in A \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow z \in A \wedge \varphi(z)$$

7. Potenčna množica

Če je A množica, je $\mathcal{P}(A)$ množica in

$$\forall z.\ z \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow \underbrace{z \subseteq A}_{\forall y .\ y \in z \Rightarrow y \in A.}$$

8. Zamenjava

Če je A množica in $f : A \to \mathrm{Set}$ preslikava, je $f_*(A) := \{y \mid \exists x \in A.\ f(x) = y\}$ množica.

9. Dobra osnovanost: Relacija $\in$ je dobro osnovana.

10. Aksiom izbire

$A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\}$

aksiom o podmnožici

$\bigcap A := \{x \mid \forall y \in A .\, x \in y\}$? Po katerih aksiomih?

Kumulativna hierarhija