Moč množic

Končne množice

Standardna končna množica

za $n \in \mathbb{N}$: $\quad [n] = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$

$$[0] = \{\}$$
$$[1] = \{0\}$$
$$[2] = \{0,1\}$$
$$[3] = \{0,1,2\}$$
$$\vdots$$

Množica A je <u>končna</u>, če obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $A \cong [n]$.
(če je izomorfna kaki standardni končni mn.)

<u>Moč</u> končne množice A je število $|A|$

$$|A| = n \Leftrightarrow A \cong [n].$$
$$|A| := \iota(n \in \mathbb{N}).\ A \cong [n]$$

Ali se lahko zgodi $A \cong [31]$ in $A \cong [42]$?
Potem $|A|$ ni dobro definiran: $|A| = 31$ in $|A| = 42$?!

To se ne more zgoditi, vse je ok.
Morali bi dokazati: $[n] \cong [m] \Rightarrow n = m$.

Velja:

(Obi-Wan error)
"off-by-one error"

$$|[n]| = n$$

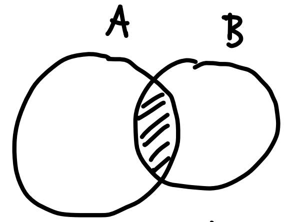
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$|A + B| = |A| + |B|$$

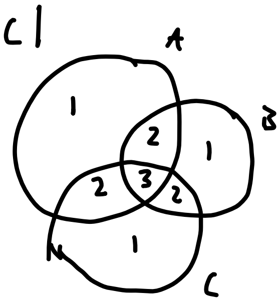
$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

Pravilo <u>vključitve - izključitve</u>:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$



$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$

<u>Neskončne množice</u>

<u>Def</u>: Množica je <u>neskončna</u>, če ni končna.

<u>Izrek</u>: Množica A je neskončna natanko tedaj, ko obstaja injektivna $\mathbb{N} \to A$.

Dokaz:

($\Leftarrow$) Predpostavimo $e : \mathbb{N} \to A$ injektivna.

Dokazujemo: $\neg \exists n \in \mathbb{N}.\ A \cong [n]$.

Predpostavimo $\exists n \in \mathbb{N}.\ A \cong [n]$. (*)

Iščemo protislovje.

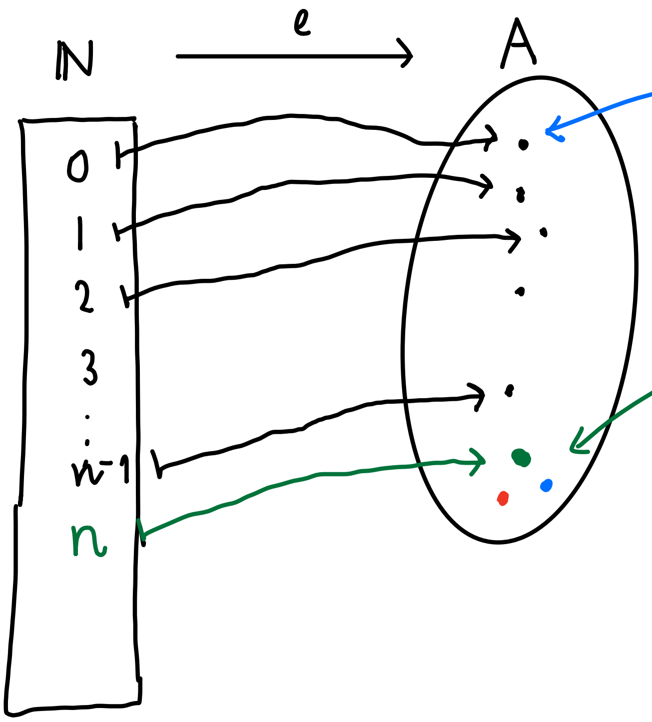
Po (*): imamo $x \in \mathbb{N}$, da velja $A \cong [x]$.

Imamo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "e", "\text{inj}"'] \arrow[rr, bend right, "f\circ e"', "\text{inj}"'] & A \arrow[r, "f", "\text{izo}"'] & {[x]} \end{tikzcd}$$

Dobili smo injektivno $f\circ e : \mathbb{N} \to [x]$.
To ni možno (dokaz opustimo).

($\Rightarrow$) Predpostavimo, da A ni končna.
Iščemo injektivno preslikavo $e : \mathbb{N} \to A$.



$A \ncong [0] = \emptyset$

$A \setminus \{e(0), \dots, e(n-1)\} \neq \emptyset$
ker bi sicer veljalo
$A \cong \{e(0), \dots, e(n-1)\} \cong [n]$

$\blacksquare$

Moč množic

Ideja: $|A|$ moč množice A
"število elementov"

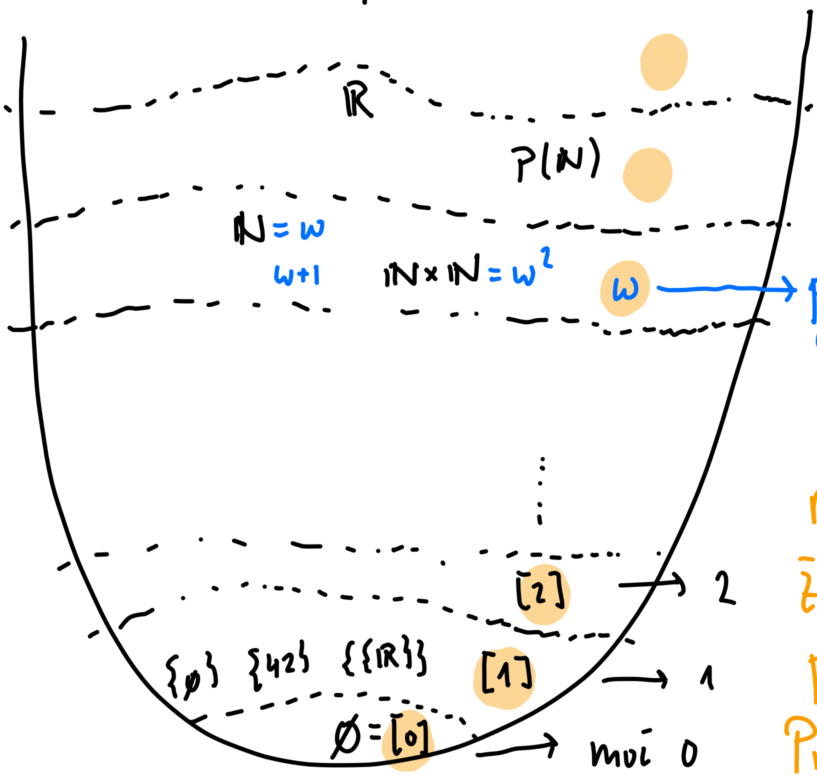
Kdaj velja $|A| = |B|$? Predlog: $|A| = |B| \Leftrightarrow A \cong B$

Kdaj velja $|A| \leq |B|$? Predlog: $|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists e : A \to B$. e injektivna

Dobimo: $|A| = |B| \Leftrightarrow |A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|$?

<u>Def</u>: Množici A in B imata enako moč, sta <u>ekvipolentni</u>, kadar sta izomorfni.

Ekv. razredi glede na ekvipolentnost oz. izomorfnost



2

1

moč 0

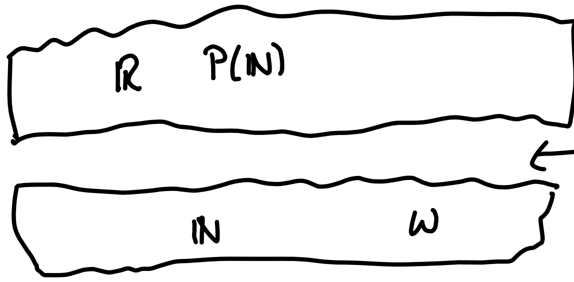
neskončne množice

prvi ordinal v tem ekv. razredu

Iz vsakega razreda za izomorfnost želimo izbrati predstavnika. Pravimo jim <u>kardinalna števila</u>.

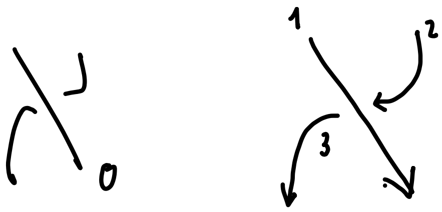
(glej zapiski)

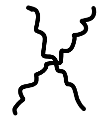
Cantorjeva hipoteza:



Tu ni ničesar vsmes.

Moč množice $\mathbb{N}$ označimo z "alef nič":





kromosom

$\aleph$ $\aleph$ $\aleph$

__Def__: $|A| \leq |B| \iff \exists e : A \to B \,.\, e$ injektivna.

Ali je $\leq$ dobro definirana?

$A \cong A'$ in $B \cong B'$ in $e : A \to B$ injektivna

$\Downarrow ?$

obstaja $e' : A' \to B'$ injektivna? ✓

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, tail, "e"] & B \arrow[dr, "g", "\cong"'] & \\ A' \arrow[ur, "f", "\cong"'] \arrow[rrr, tail, "e' := g \circ e \circ f"'] & & & B' \end{tikzcd}$$

Lastnosti: $|A| \leq |A|$ ✓

$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$ ✓

Kaj pa $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$?

injektivna $f : A \to B$
injektivna $g : B \to A$ $\Longrightarrow$? obstaja bijektivna $h : A \to B$

<u>Izrek</u> (Cantor–Schröder–Bernstein):
Če $|A| \leq |B|$ in $|B| \leq |A|$, potem $|A| = |B|$.

Linearnost $\leq$?

Izrek o trihotomiji:
$$|A| < |B| \vee |A| = |B| \vee |A| > |B|$$

kjer $|A| < |B| :\Longleftrightarrow |A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$
$\Longleftrightarrow$ (obstaja injektivna $A \to B$) $\wedge$
(<u>ne</u> obstaja injektivna $B \to A$).

<u>Izrek</u> (Cantor): $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
Dokaz: naslednjič.

<u>Def</u>: Množica A je
- <u>števna</u>, če $|A| \leq \aleph_0$
- <u>neštevna</u>, če $|A| > \aleph_0$

- števno neskončna, če je $|A| = \aleph_0$

<u>Izrek</u>: Števna unija števnih množic je števna:

$$A : I \to \mathrm{Set} \qquad |I| \leq \aleph_0$$

$$\forall i \in I .\ |A_i| \leq \aleph_0$$

sledi: $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq \aleph_0$