Indukcija & dobra osnovanost

Indukcija na $\mathbb{N}$:

naslednik n

① $$\underbrace{\varphi(0)}_{\text{baza}} \land \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N}.\ \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n^+))}_{\text{indukcijski korak}} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}.\ \varphi(m)$$

RANT

$3 \mid n^3 - n$

m m

① Baza ✓

② Korak: predpostavimo IH: $3 \mid n^3 - n$

dok. $3 \mid (n+1)^3 - (n+1)$

---

② Z množicami: za vsako $S \subseteq \mathbb{N}$

$$\underbrace{0 \in S}_{\text{baza}} \land \underbrace{(\forall k \in \mathbb{N}.\ k \in S \Rightarrow k^+ \in S)}_{\text{korak}} \Rightarrow \forall n.\ n \in S$$

$(S = \mathbb{N})$

$\Updownarrow$

③ $$\underbrace{(\forall m \in \mathbb{N}.\ \underbrace{(\forall k \in \mathbb{N}.\ k^+ = m \Rightarrow k \in S)}_{\text{"vsi predhodniki } m \text{ so elementi } S} \Rightarrow m \in S)}_{\text{če so predhodniki } m \text{ v } S \text{, je tudi } m \text{ v } S} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

$(\top = p) = p$

Krepka indukcija

$$\forall S \in P(\mathbb{N}).\ \big(\underbrace{\forall m\in\mathbb{N}.\ (\forall k\in\mathbb{N}.\ k<m \Rightarrow k\in S) \Rightarrow m\in S}_{\text{če so manjši od } m \text{ v } S\text{, je tudi } m \text{ v } S}\big) \Rightarrow S=\mathbb{N}$$

Def: Relacija $R \subseteq A\times A$ je dobro osnovana, ko velja

$$\forall S\in P(A).\ \big(\forall y\in A.\ (\forall x\in A.\ xRy \Rightarrow x\in S) \Rightarrow y\in S\big) \Rightarrow S=A. \quad (*)$$

Množici $S\subseteq A$, ki zadošča pogoju

$$\forall y\in A.\ (\forall x\in A.\ xRy\Rightarrow x\in S)\Rightarrow y\in S$$

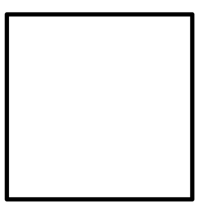
pravimo R-progresivna (progresivna glede na R).

Primer: $A=\mathbb{N}$ in $R = <$.

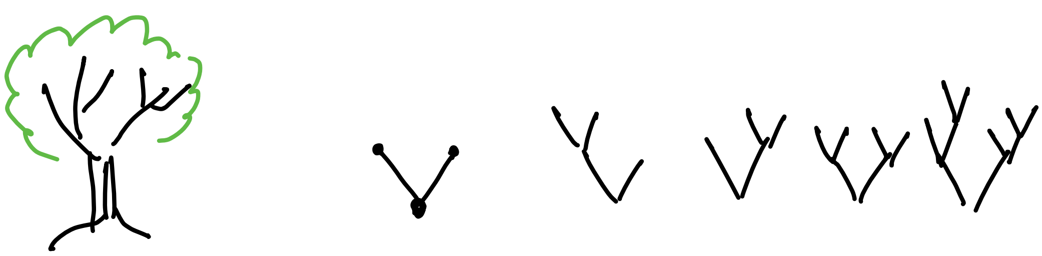
$A=\mathbb{N}$ in $xRy :\Leftrightarrow x^+=y$

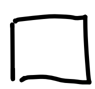
$(*)$ je indukcijski princip.

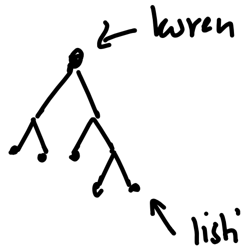
Dvojiška drevesa

Prazno drevo:  ← Tu notri je narisano prazno drevo

$\equiv$

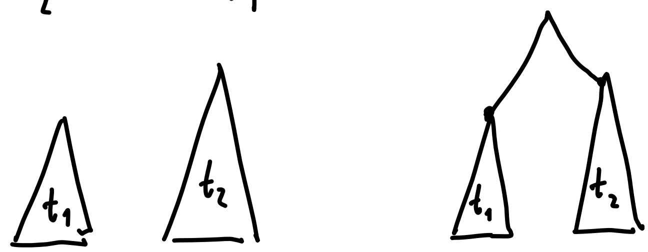


 ← Tu notri je 0 paličic



Induktivna definicija množice Tree:

- empty $\in$ Tree
- če $t_1, t_2 \in \text{Tree}$, potem $\text{tree}(t_1, t_2) \in \text{Tree}$



Indukcija za drevesa:

induktivni hipotezi

$$\underbrace{\varphi(\text{empty})}_{\text{baza}} \wedge \underbrace{\left(\forall t_1, t_2 \in \text{Tree}.\ \varphi(t_1) \wedge \varphi(t_2) \Rightarrow \varphi(\text{tree}(t_1, t_2))\right)}_{\text{induktivni korak}} \Rightarrow \forall u \in \text{Tree}.\ \varphi(u)$$

Ekvivalentno z dobro osnovanostjo:

$$R \subseteq \text{Tree} \times \text{Tree}$$

$$t \mathrel{R} s :\Leftrightarrow (\exists u \in \text{Tree}.\ s = \text{tree}(t, u)) \vee (\exists v.\ s = \text{tree}(v, t))$$

t je levi sin s

desni sin

"t je predhodnik s"

"t je levi sin s ali desni sin s"

Indukcija za drevesa: R je dobro osnovana

Def: Naj $R \subseteq A \times A$. <u>Padajoča veriga</u> za R je zaporedje $a : \mathbb{N} \to A$, za katerega $\forall n \in \mathbb{N}.\ a_{n+1} R a_n$:

$$\dots R\ a_2\ R\ a_1\ R\ a_0$$

Primer: $a_n = 7 - 2n$, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, relacija $<$

$a_0 = 7$

$a_1 = 5$

$a_3 = 3$ $\quad \dots < -3 < -1 < 1 < 3 < 5 < 7$

Primer: $\mathbb{Q}$, relacija $\geq$.

$a_n = \frac{1}{n}$ NI PADAJOČA GLEDE NA $\geq$.

$a_n = \frac{3}{8}$ JE PADAJOČA GLEDE NA $\geq$.

$a_n = 1 - \frac{1}{n}$ JE PADAJOČA ...... $\geq$.

Lema: V dobri osnovanosti ni padajočih verig.

Dokaz:

$R \subseteq A \times A$,

$a : \mathbb{N} \to A$ padajoča veriga za R

Dokazujemo: R ni dobro osnovana.

$S := A \setminus \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je R-progresivna in $S \neq A$.

$\Downarrow$

dokaz v zapiskih.

Cikel za $R \subseteq A \times A$:

$$a_0 R a_n R \cdots R a_2 R a_1 R a_0$$

Cikel dolžine 1: $a_0 R a_0$

Če imamo cikel, imamo tudi padajočo verigo:

$$\cdots \underbrace{a_0 R a_n \cdots a_1 R}\ \underbrace{a_0 R a_n \cdots a_1 R}\ \underbrace{a_0 R a_n \cdots a_1 R a_0}_{\text{cikel}}$$

Dobra urejenost

Def: Relacija $R \subseteq A \times A$ je <u>stroga urejenost</u>, če je

- irefleksivna: $\forall x \in A.\ \neg(x R x)$
- tranzitivna

Stroga urejenost je <u>linearna</u>, če je še

- sovisna: $\forall x, y \in A.\ x R y \vee x = y \vee y R x$

Uporabljamo simboli: $<, \subset, \sqsubset, \prec, \ldots$

<u>Primer</u>: $\mathbb{N}, <$ stroga, linearna

<u>Primer</u>: $\mathbb{N}, R$ $\quad k R m \Leftrightarrow k \neq m$ in $k \mid m$ "pravi delitelj"

Stroga, ni linearna

Če je $\leq$ delna ureditev, potem dobimo strogo $<$ s predpisom

$$x < y :\Longleftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

Obratno
$$x \leq y :\Longleftrightarrow x < y \vee x = y$$

<u>Def</u>: Relacija je <u>dobra ureditev</u>, če je dobro osnovana in stroga linearna ureditev.

<u>Izrek</u>: R je dobra ureditev $\Leftrightarrow$ R je dobro osnovana in sovisna.

<u>Izrek</u>: Naj bo $\sqsubset$ relacija na A. Ekvivalentne izjave:

(1) $\sqsubset$ je dobro osnovana
(2) vsaka neprazna $S \subseteq A$ ima $\sqsubseteq$-minimalni element
(3) $\sqsubset$ nima padajočih verig.

<u>Izrek</u>: Naj bo $\sqsubset$ stroga urejenost na A. Ekvivalentne:

(1) $\sqsubset$ je dobra urejenost
(2) Vsaka neprazna $S \subseteq$ ima $\sqsubseteq$-prvi element
(3) $\sqsubset$ nima padajočih verig in je sovisna.

<u>Primeri dobrih urejenosti</u>:

$0 < 1 < 2 < \cdots < 42$ $\qquad \{0, \ldots, 42\}, <$

$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots\cdots$ $\qquad \mathbb{N}, <$

$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \omega$ $\qquad \mathbb{N} \cup \{\omega\}$

$0 < 1 < 2 < \cdots < \cdots < \omega < \omega + 1$

$\vdots$

$0 < 1 \cdots \omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \omega + 3 < \cdots < \omega + \omega < \omega + \omega + 1$

$\vdots$

ORDINALNA ŠTEVILA