Relacije urejenosti

Def: Relacija $R \subseteq A \times A$ je:

1. <u>Šibka urejenost</u>, ko je refleksivna in tranzitivna
2. <u>Delna urejenost</u>, ko je refleksivna, tranzitivna in antisimetrična
3. <u>Linearna urejenost</u>, ko je delna in $\forall x, y \in A \,.\, xRy \lor yRx$.
   stroga sovisnost

Primeri:

- deljivost na $\mathbb{N}$ $\qquad a \mid b$ "a deli b"
  - je delna urejenost
  - ni linearna, ker $3 \nmid 5$ in $5 \nmid 3$
- deljivost na $\mathbb{Z}$
  - je šibka urejenost
  - ni antisimetrična, ker $12 \mid -12$ in $-12 \mid 12$ vendar $-12 \neq 12$.
- relacija $\leq$ na $\mathbb{R}$ je linearna
- relacija $<$ na $\mathbb{R}$ ni šibka, ker ni refleksivna
- relacija $\geq$ na $\mathbb{R}$ je linearna
- relacija $=$ na A: refleksivna ✓, tranzitivna ✓, antisimetrična ✓ } delna
  vsaj dva elementa $\rightarrow$ ni linearna
- relacija $\subseteq$ na Set: delna urejenost

  ni linearna ker $\{1, \sqrt{2}\} \nsubseteq \{5, \ln 7\}$ in $\{5, \ln 7\} \nsubseteq \{1, \sqrt{2}\}$

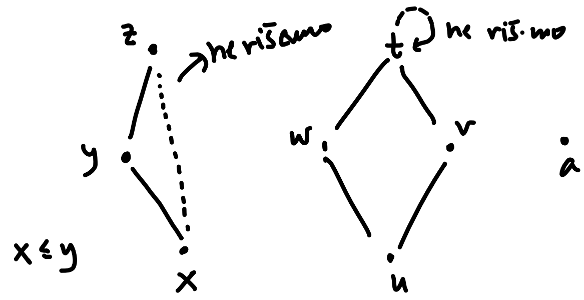
Za urejenosti uporabljamo $\leq, \geq, \sqsubseteq, \sqsupseteq, \subseteq, \supseteq, \preccurlyeq, \succcurlyeq$

Hassejev diagram delne urejenosti

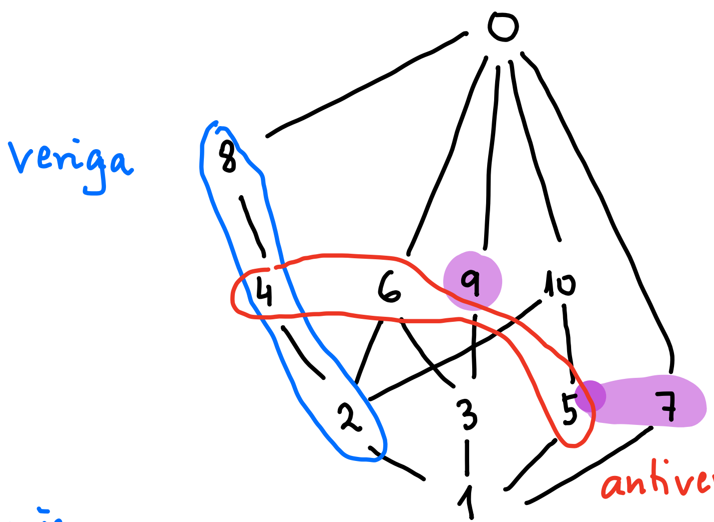
$R \subseteq A \times A$

$(A, \leq)$ delna urejenost $\leq \subseteq A \times A$

$\leq \; = \{(x,y) \in A \times A \mid x \text{ je manjši ali enak } y\}$



Primer: Hassejev diagram relacije $\mid$ deljivost na $\{0,1,\dots,10\}$



$V \subseteq A$ veriga če

$\forall x,y \in V.\ x \leq y \lor y \leq x$

antiveriga $S \subseteq A$

$\forall x,y \in S.\ x \neq y \Rightarrow x \not\leq y \land y \not\leq x$

$\forall x,y \in S.\ x \leq y \lor y \leq x \Rightarrow x = y$

Operacije na urejenostih

Obratna urejenost:

$(P, \leq)$ delna

$(P, \leq^T)$ obratna $\Rightarrow$ tudi delna

$x \leq^T y \Leftrightarrow y \leq x$

$(P, \leq)$ linearna $\Rightarrow$ $(P, \leq^T)$ linearna

pišemo $\geq$

__Primeri:__ obratna od $(\mathbb{R}, \leq)$ je $(\mathbb{R}, \geq)$

Obratna od deljivosti na $\mathbb{N}$ je "večkratnost" na $\mathbb{N}$

$\{(a,b) \mid a \mid b\}$ a je večkratnik b

$\{(a,b) \mid b \mid a\}$

Produktna urejenost

Delni $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$

__Produktna:__ $(P \times Q, \leq_{P\times Q})$

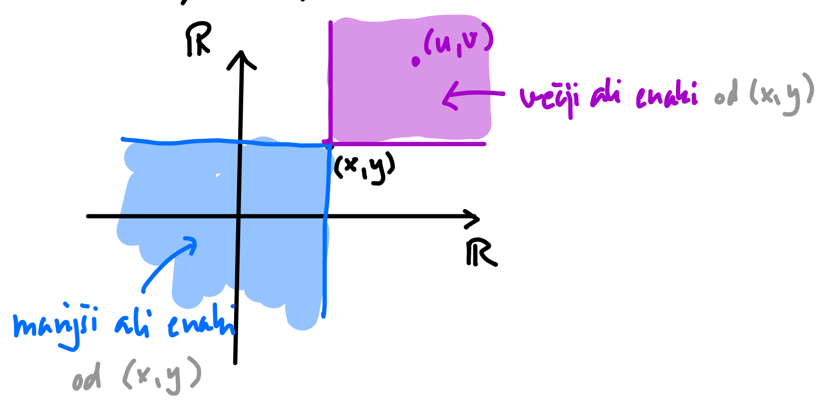
$$(x,y) \leq_{P\times Q} (u,v) :\Leftrightarrow x \leq_P u \text{ in } y \leq_Q v$$

__Leksikografska urejenost__ (ki jo naredimo iz $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$)

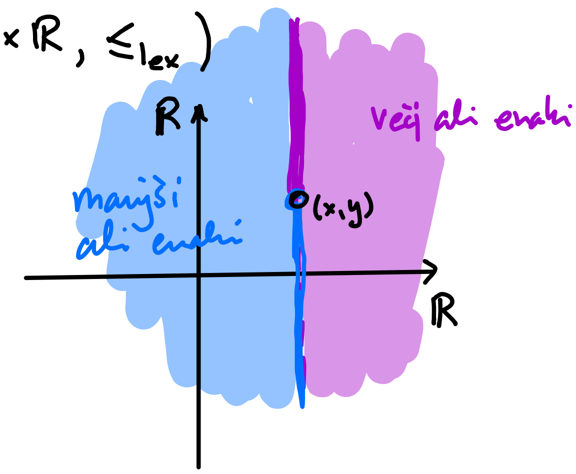
$(P \times Q, \leq_{lex})$

$$(x,y) \leq_{lex} (u,v) :\Leftrightarrow (x \neq u \wedge x \leq_P u) \vee (x = u \wedge y \leq_Q v)$$

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}})$



$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \leq_{lex})$



Ali 0 deli 0?

$$a \mid b :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\ b = k \cdot a$$

$$0 \mid 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\ 0 = k \cdot 0$$

Vsota urejenosti:

__Primer__

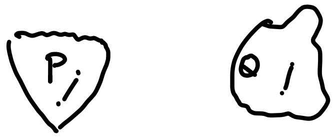
$(P+Q, \leq_+)$

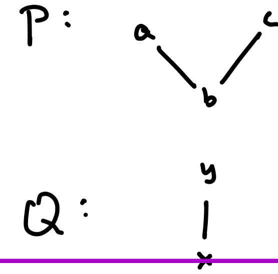
$in_1(a) \leq in_1(b) :\Leftrightarrow a \leq_P b$

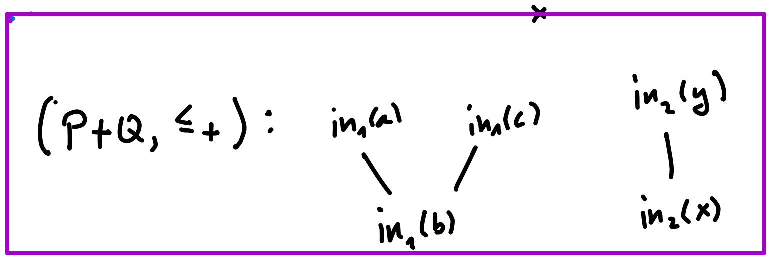
$in_2(u) \leq in_2(v) :\Leftrightarrow u \leq_Q v$

$in_1(a) \leq in_2(b) :\Leftrightarrow \bot$

$in_2(u) \leq in_1(b) :\Leftrightarrow \bot$







<u>Zaporedna vsota</u>:

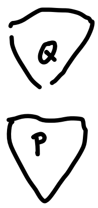
$(P+Q, \leq_\to)$

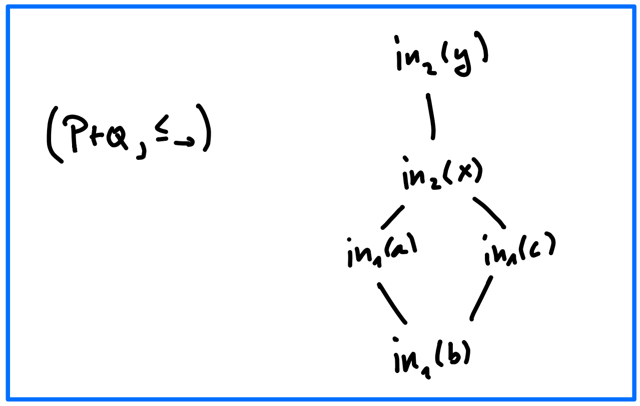
$in_1(a) \leq in_1(b) :\Leftrightarrow a \leq_P b$

$in_2(u) \leq in_2(v) :\Leftrightarrow u \leq_Q v$

$in_1(a) \leq in_2(b) :\Leftrightarrow \top$

$in_2(u) \leq in_1(b) :\Leftrightarrow \bot$





Monotona preslikava

Delni urejenosti $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$.

Preslikava $f : P \to Q$ je <u>monotona</u>, če (tudi <u>naraščajoča</u>)

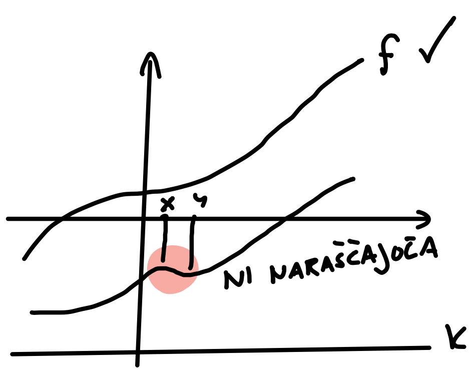
$$\forall x, y \in P.\ x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y)$$

Preslikava je <u>antimonotona</u> (<u>padajoča</u>), če

$$\forall x, y \in P.\ x \leq_P y \Rightarrow f(y) \leq_Q f(x)$$

<u>Primer</u>: $(\mathbb{R}, \leq)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Konstanta je naraščajoča in padajoča

Primer: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\leq_\times \qquad \leq$

$(x,y) \leq_\times (u,v) \Rightarrow x + y \leq u + v$? ✓
$x \leq u$ in $y \leq v$
monotona

množenje $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\leq_\times \qquad \leq$

$-1 \leq 0$ in $-1 \leq 0$ vendar $(-1)\cdot(-1) \not\leq 0 \cdot 0$

Izrek: Identiteta je monotona.
Kompozitum monotonih preslikav je monotona preslikava.

Definicija 12.18 Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost, $S \subseteq P$ in $x \in P$:

- x je **spodnja meja** podmnožice S, ko velja $\forall y \in S \,.\, x \leq y$,
- x je **zgornja meja** podmnožice S, ko velja $\forall y \in S \,.\, y \leq x$,
- x je **infimum** ali **največja spodnja meja** ali **natančna spodnja meja** podmnožice S, ko je spodnja meja S in velja: za vse $y \in P$, če je y spodnja meja S, potem je $y \leq x$,
- x je **supremum** ali **najmanjša zgornja meja** ali **natančna zgornja meja** podmnožice S, ko je zgornja meja S in velja: za vse $y \in P$, če je y zgornja meja S, potem je $x \leq y$,
- x je **minimalni element** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall y \in S \,.\, y \leq x \Rightarrow x = y$,
- x je **maksimalni element** podmnožice S, ko velja $\cancel{x \in s \text{ in } \forall x \in S \,.\, x \leq y \Rightarrow x =}\, y$,
- x je **najmanjši** ali **prvi** element ali **minimum** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall y \in S \,.\, x \leq y$,
- x je **največji** ali **zadnji** element ali **maksimum** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall y \in S \,.\, y \leq x$.

Dana $(P, \leq)$ in $S \subseteq P$

spodnja meja
infimum
minimalni element
minimum NI MINIMUMA
maksimum
supremum