Ekvivalenčne relacije

$(p \Rightarrow T) = T$
$(\bot \Rightarrow q) = T$

<u>Def</u>: $R \subseteq A \times A$ je <u>ekvivalenčna</u>, če je
- refleksivna: $\forall x \in A.\ xRx$
- tranzitivna: $\forall x, y, z \in A.\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
- simetrična: $\forall x, y \in A.\ xRy \Rightarrow yRx$

xRy "x in y sta <u>ekvivalentna</u> (glede na R)"

Za ekv. rel. uporabljamo simbole: $\equiv, \approx, \cong, \simeq, \sim$

<u>Primeri</u>
- vzporednost premic ✓
- pravokotnost X
- skladnost trikotnikov ✓
- podobnost trikotnikov ✓
- "isti ostanek pri deljenju s 7" na $\mathbb{N}$ ✓

  $m \equiv n \pmod 7$
- enakost $=$ na množici A
- prazna relacija $\emptyset \subseteq A \times A$
  - ↳ če $A = \emptyset$: $\emptyset \subseteq \emptyset \times \emptyset$ ✓
  - ↳ če $A \neq \emptyset$: $\emptyset$ ni refleksivna X
- polna relacija: $A \times A \subseteq A \times A$

Ekvivalenčna relacija, porojena s preslikavo

Preslikava $f: A \to B$.

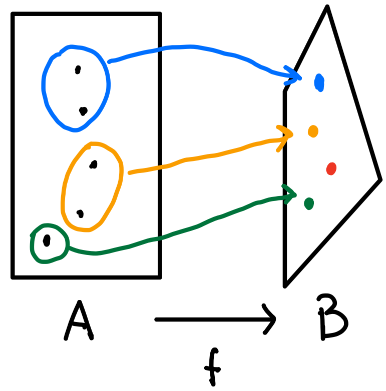
Definiramo $\sim_f \subseteq A \times A$ $\qquad a * b = b * a$

$$x \sim_f y \;:\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)$$

$\sim_f$ refleksivna: naj bo $x \in A$

$x \sim_f x \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ ✓

↳ refleksivnost $=$



$\sim_f$ simetrična:

$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

$\Updownarrow$ ✓ ← uporabili smo simetričnost $=$

$y \sim_f x \Leftrightarrow f(y) = f(x)$

$\sim_f$ tranzitivna: DN.

Primer: $p \parallel q$ $\qquad$ p in q vzporedni premici v ravnini

$\mathcal{P}$ množica vseh premic.

Ali lahko najdemo $f: \mathcal{P} \to B$, da $p \parallel q \Leftrightarrow f(p) = f(q)$

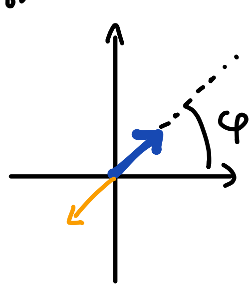
Ali je $\parallel$ porojena s preslikavo?

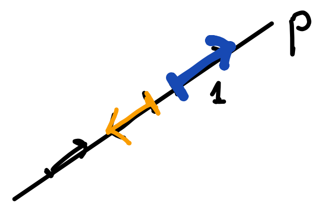
$f: \mathcal{P} \to$ vektorji v ravni

$p \mapsto$ enotski smerni vektor

$0 \le \varphi < \pi$

$\left(\frac{\pi}{3} \le \varphi < \frac{\pi}{3} + \pi\right)$



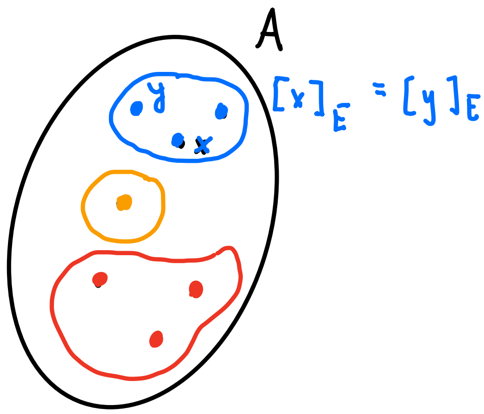


Ekvivalenčni razred

Naj bo $E \subseteq A \times A$ ekv. rel. na A.

__Ekvivalenčni razred__ elementa $x \in A$ je množica

$$[x]_E := \{ y \in A \mid x E y \}$$



Opazimo:

$$[x]_E = [y]_E \iff x E y$$

__Kvocientna__ ali __faktorska__ množica

$$A/_E := \{ [x]_E \mid x \in A \}$$

$$= \{ S \subseteq A \mid \exists x \in A .\ S = [x]_E \}$$

__Primer__: Relacija $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$x E y \iff x \equiv y \pmod 4 \iff \exists k \in \mathbb{Z}.\ x - y = 4k$$

$$[0]_E = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$$

$$[1]_E = \{1, 5, 9, 13, \dots\}$$

$$[6]_E = \{2, 6, 10, 14, \dots\}$$

$$\mathbb{N}/E = \{ \{0,4,8,12,16,\dots\}, \{1,5,9,13,17,\dots\}, \{2,6,10,\dots\}, \{3,7,11,\dots\} \}$$

$$= \{ [0]_E, [1]_E, [2]_E, [3]_E \}$$

$$= \{ [0]_E, [21]_E, [6]_E, [19]_E, [8]_E, [8]_E \}$$

Izrek: Vsaka ekvivalenčna relacija je porojena s preslikavo.

Dokaz: Naj bo $E \subseteq A \times A$ ekvivalenčna

<u>Kvocientna preslikava</u> $q_E : A \to A/E$
$$x \mapsto [x]_E$$

$$x \, E \, y \Leftrightarrow [x]_E = [y]_E \Leftrightarrow q_E(x) = q_E(y)$$

Torej je E porojena s q_E. $\blacksquare$

<u>Primer</u>:

$$E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$x \, E \, y \,:\Leftrightarrow\, x \equiv y \pmod 4$$

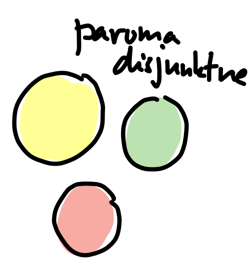
$$q_E : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}/E$$

$$0 \mapsto [0]_E = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$$
$$1 \mapsto [1]_E = \{1, 5, 9, 13, \dots\}$$
$$2 \mapsto [2]_E = \{2, 6, 10, 14, \dots\}$$
$$\vdots$$
$$6 \mapsto [6]_E = \{2, 6, 10, 14, \dots\}$$

Razdelitev ali particija množice

<u>Def</u>: <u>Razdelitev</u> ali <u>particija</u> množice A je množica <u>nepraznih</u>, <u>paroma disjunktnih podmnožic</u> A, ki tvorijo <u>pokritje</u> A.
Se pravi, to je $S \subseteq P(A)$, da:

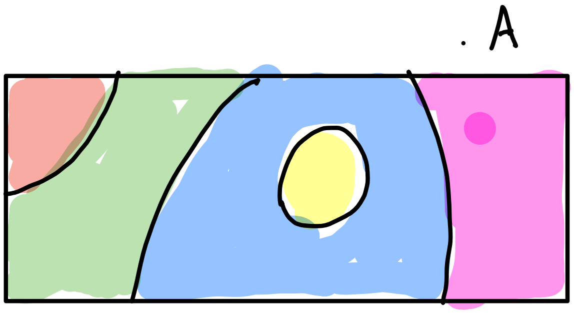
1. $\forall B \in S.\ B \neq \emptyset$
2. $\forall B, C \in S.\ B \neq C \Rightarrow B \cap C = \emptyset$
   $B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow B = C$

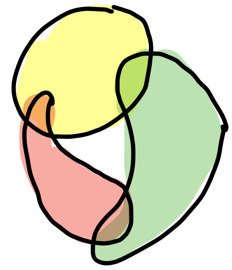


③ $\bigcup S = A$

$$\bigcup_{B \in S} B = \bigcup S$$

Slika:





disjunktne

(niso paroma disjunktne)

Primer: $\{A\}$ je razdelitev A

Izrek: Ekvivalenčni razredi tvorijo razdelitev množice.

$E \subseteq A \times A$, tedaj A/E je razdelitev A.

Preverimo:

$z \in [x]_E \cap [y]_E$, potem $[x]_E = [y]_E$

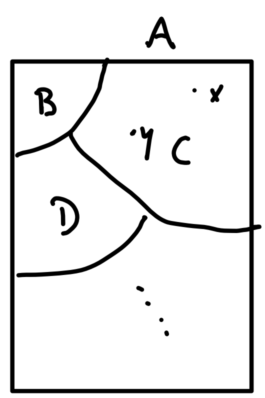
$$zEx \wedge zEy \Rightarrow xEy$$

$$zEx \overset{\text{sim}}{\Downarrow} xEz$$

tranz.

Vsaka razdelitev A določa ekvivalenčno rel. na A:

$S \subseteq P(A)$ razdelitev



$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; \exists \sigma \in S .\; x \in \sigma \wedge y \in \sigma$

tedaj: $A/\sim \; = S$

$S = \{B, C, D, \dots\}$

tranzitivnost $\sim$:

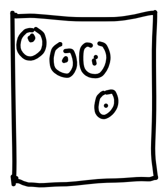
$$x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$$

$$x \in \sigma \wedge y \in \sigma \wedge y \in \bullet \wedge z \in \bullet \Rightarrow x \in \bullet \wedge z \in \bullet$$

$$y \in \sigma \cap \bullet \Rightarrow \sigma = \bullet$$

<u>Primer</u>: Katera ekv. relacija je določena z razdelitvijo $\{\{x\} \mid x \in A\}$?

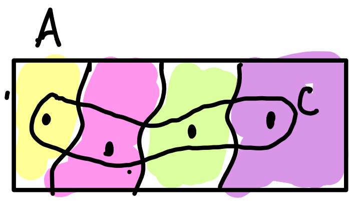
Odgovor: $=$ na A



<u>Izbor predstavnikov</u>:

$E \subseteq A \times A$ ekvivalenčna

<u>Izbor predstavnikov</u> za E je $C \subseteq A$, da C seka vsak ekv. razred E v natanko enem elementu.



<u>Primer</u>:

Vaje:

Definiramo

$$A/E \xrightarrow[f]{} B$$

$$[x]_E \longmapsto \dots x \dots$$

$$xEy \overset{?}{\Longrightarrow} f(x) = f(y) \qquad f \text{ dobro definirana}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b \cdot d}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{7} \overset{?}{=} \frac{4}{6} + \frac{3}{21}$$