Funkcijske relacije

Funkcija $f : A \to B$ določa

<u>graf</u> $\Gamma_f \subseteq A \times B$

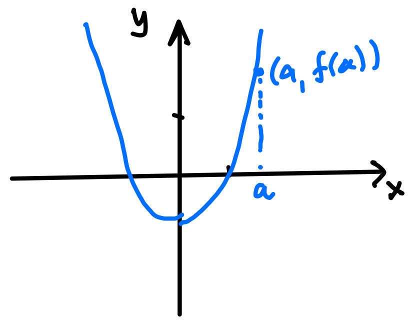
$$\Gamma_f = \{ (x,y) \in A \times B \mid f(x) = y \}.$$

<u>Primer</u>:

$$f : \{0,1,2,3\} \to \mathbb{Z}$$
$$f(k) := k^2$$
$$\Gamma_f = \{ (0,0), (1,1), (2,4), (3,9) \}$$

<u>Primer</u>:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := x^2 - 1$$



Kdaj je $R \subseteq A \times B$ graf neke funkcije $A \to B$?

Kdaj je R prirejanje, ki določa preslikavo?

Odgovor:

- R je <u>celovita</u>: $\forall x \in A.\ \exists y \in B.\ (x,y) \in R$
- R je <u>enolična</u>: $\forall x \in A.\ \forall y,z \in B.\ xRy \land xRz \Rightarrow x = y$

Skupaj: $\forall x \in A.\ \exists! y \in B.\ xRy$

Preverimo, da je Γ_f za $f : A \to B$ res funkcijska relacija:

$$\forall x \in A.\ \exists! y \in B.\ x \Gamma_f y$$

Pomni:
$S \subseteq T$
$\Updownarrow$
$S \in P(T)$

$$\forall x \in A.\ \exists! y \in B.\ \overbrace{f(x) = y}^{(x,y) \in \Gamma_f}$$

Izrek (povezava med funkcijami in funk. relacijami)

$$B^A \cong \{ R \in P(A \times B) \mid \forall x \in A.\ \exists! y \in B.\ x R y \}$$

Dokaz:

$$B^A \underset{\varphi}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \{ R \in P(A \times B) \mid \forall x \in A.\ \exists! y \in B.\ x R y \}$$

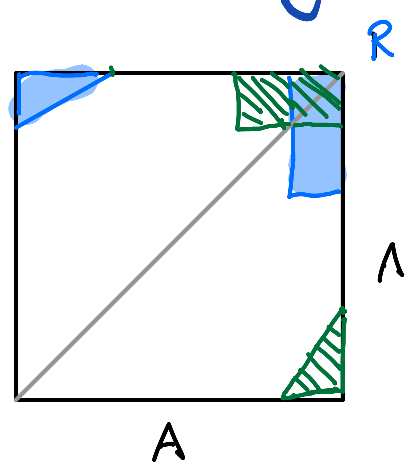
$\Gamma(f) := \{ (x,y) \in A \times B \mid f(x) = y \}$ (zgoraj Γ_f namesto $\Gamma(f)$)

$\varphi(R) := (x \mapsto \iota(y \in B).\ x R y)$

Preveriti: $\varphi(\Gamma(f)) = f$ in $\Gamma(\varphi(R)) = R$. $\blacksquare$

Ovojnice relacij

$R \subseteq A \times A$



$R \cup R^T$
simetrična

Def: Tranzitivna ovojnica relacije $R \subseteq A \times A$ je najmanjša tranzitivna relacija, ki vsebuje R.
Natančneje: $T \subseteq A \times A$ je tranzitivna ovojnica R, ko:
1) T je tranzitivna

2) $R \subseteq T$ (ekvivalentno: $\forall x, y \in A .\ x R y \Rightarrow x T y$)

3) Če je $U \subseteq A \times A$ tranzitivna in $R \subseteq T$, potem $T \subseteq U$.

Ovojnica ali "ogrinjača" ali "zaprtje".

<u>Refleksivna ovojnica R</u>: najmanjša refleksivna relacija, ki vsebuje R.

Simetrična ... simetrična

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

<u>Lema</u>: Naj bo $R : I \to \mathcal{P}(A \times A)$.
Če za vsak $i \in I$ velja R_i tranzitivna,
je tudi $\bigcap_{i \in I} R_i$ tranzitivna.

Dokaz:

Naj bo $x, y, z \in A$.

Predpostavimo $x \, (\bigcap R) \, y$ [(1)] in $y \, (\bigcap R) \, z$ [(2)].

Dokazujemo $x \, (\bigcap R) \, z$:

$$(x, z) \in \bigcap R \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall i \in I .\ (x, z) \in R_i$$

Naj bo $i \in I$. Dokazujemo $(x, z) \in R_i$.

Zaradi (1) velja: $(x, y) \in R_i$

zaradi (2) velja: $(y, z) \in R_i$

Ker je R_i tranzitivna, sledi $(x, z) \in R_i$ $\blacksquare$

<u>Izrek</u>: Vsaka relacija $R \subseteq A \times A$ ima tranzitivno ovojnico.

Dokaz: Podamo $T := \bigcap \{ S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S \text{ in } S \text{ tranzitivna} \}$ (*)

Preverimo: (1) T tranzitivna ✓ glej lemo

(2) $R \subseteq T$ ✓

(3) Denimo $U \subseteq A \times A$, U tranzitivna, $R \subseteq U$.

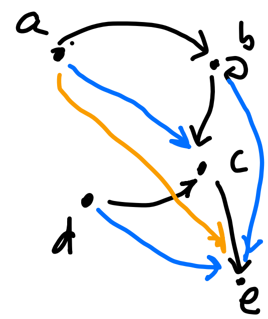
Dokažimo $T \subseteq U$.

Velja, ker je U element (*) ∎

Drugi način: $R \subseteq A \times A$

tranzitivna ovojnica R je

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots$$



oziroma

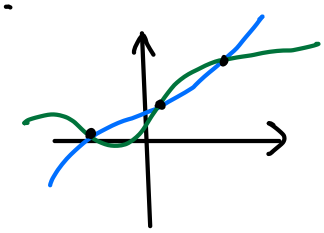
$$\bigcup_{n \geq 1} R^n \quad \text{pišemo } R^+$$

- Refleksivna ovojnica: $R \cup \Delta_A$
- Simetrična ovojnica: $R \cup R^T$
- Refleksivna tranzitivna ovojnica: $\bigcup_{n \geq 0} R^n$ pišemo R^*

Protiprimer:

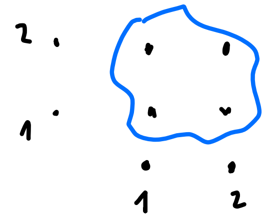
Ali ima vsaka $R \subseteq A \times A$ funkcijsko ovojnico?

$R \subseteq F \subseteq A \times A$ funkcijska



Protiprimer: $A = \{1, 2\}$

$R = A \times A$



R ni vsebovana v funkcijski relaciji:

$1 R 1$

$1 R 2$

vendar

$1 \neq 2$