Relacije

<u>Predikat</u> na množici A opisuje neko lastnost elementov A.

Primer: "sodo" na $\mathbb{N}$

Predikat P na A je:

1) Preslikava $P : A \to 2$,
$$x \mapsto \begin{cases} \top & \text{če } x \text{ ima lastnost } P \\ \bot & \text{če } x \text{ nima lastnosti } P \end{cases}$$

2) Podmnožica $P \subseteq A$ tistih $x \in A$, ki imajo lastnost P.

Spomnimo se: $2^A \cong \mathcal{P}(A)$

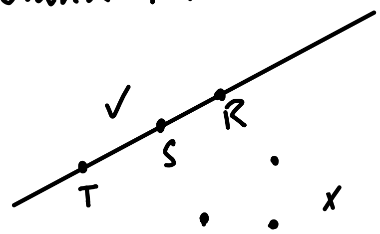
1) predikati kot preslikave

2) Predikate kot podmnožice

<u>Relacija</u> na množicah $A_1, A_2, \dots, A_n$ je predikat na $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.
To je n-mestna relacija (tudi n-členа).

Primer: Kolinearnost treh točk v ravnini:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \text{ravnina } \mathbb{R}^2$$



Relacija na $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2$.

Kot preslikava:

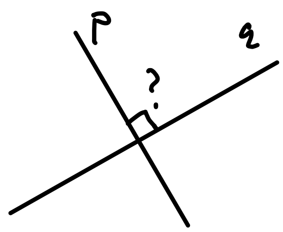
$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{2}$$

$$(T, S, R) \longmapsto (T, S, R \text{ ležijo na skupni premici})$$

Kot podmnožica

$$\{ (T, S, R) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid T, S, R \text{ ležijo na skupni premici} \}$$

Primer: Pravokotnost premic je dvomestna relacija med premicami.



Z drugimi besedami:

Relacija R na $A_1, \dots, A_n$ je podmnožica $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

$(x_1, \dots, x_n) \in R$ elementi $x_1, \dots, x_n$ so v relaciji R

pišemo tudi $R(x_1, \dots, x_n)$

Najbolj pogoste so dvojiške relacije $R \subseteq A \times B$ "relacija med A in B"

domena R kodomena R

Pogosto imamo relacijo $R \subseteq A \times A$ "relacija na A"

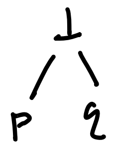
Primer: Naj bo $\mathcal{P}$ množica vseh premic v ravnini.

Pravokotnost:

$$\perp \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P} \qquad \perp := \{(p,q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mid p \text{ in } q \text{ pravokotni}\}$$

$p, q \in \mathcal{P}$ premici, pišemo $(p,q) \in \perp$

$\perp(p,q)$



$p \perp q$ običajni zapis

Zapis za dvojiško relacijo $R \subseteq A \times B$: xRy

Primer: $x = y$, $x \leq y$, $x \geq y$, ...

Primeri:

- deljivost na $\mathbb{N}$: $n \mid m$ "n deli m"

  $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

  $4 \mid 14$ ne

  $4 \mid 44$ da

- manjše na $\mathbb{R}$: $x < y$

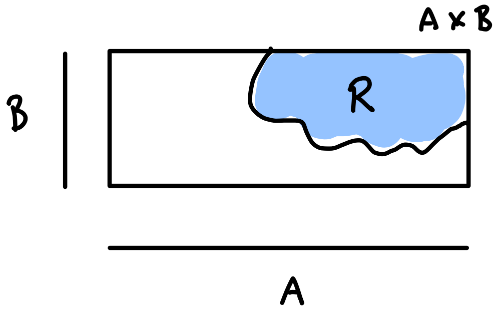
- prazna relacija $\emptyset \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$

- univerzalna ali polna relacija: $A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$

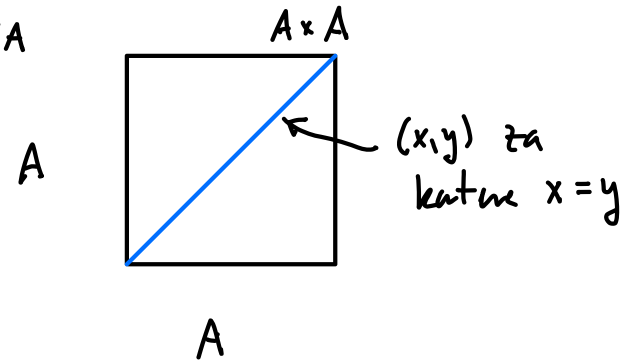
- diagonala na A, enakost na A:

  $$\Delta_A := \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$$

$R \subseteq A \times B$



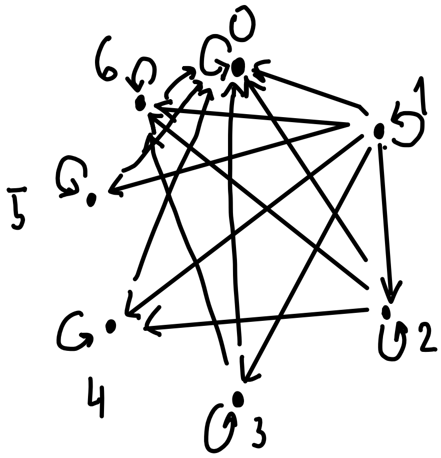
Δ_A



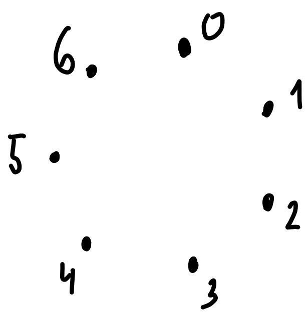
- končne relacije, primer:

R na $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

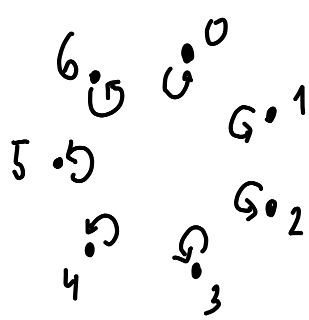
$xRy :\Leftrightarrow x$ deli y

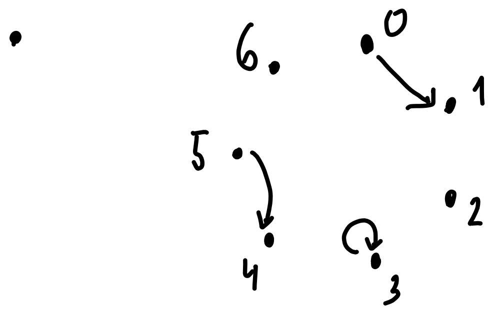


- prazna relacija na $\{0,1,2,3,4,5,6\}$



- enakost na $\{0,1,2,3,4,5,6\}$





To je relacija

$\{(0,1),(3,3),(5,4)\} \subseteq \{0,\dots,6\} \times \{0,\dots,6\}$

Osnovne lastnosti relacij

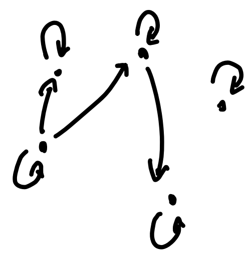
$R \subseteq A \times A$

- **refleksivna:** $\forall x \in A \,.\, x\,R\,x$,
- **simetrična:** $\forall x, y \in A \,.\, x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$,
- **antisimetrična:** $\forall x, y \in A \,.\, x\,R\,y \wedge y\,R\,x \Rightarrow x = y$,
- **tranzitivna:** $\forall x, y, z \in A \,.\, x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$,
- **irefleksivna:** $\forall x \in A \,.\, \neg(x\,R\,x)$,
- **asimetrična:** $\forall x, y \in A \,.\, x\,R\,y \Rightarrow \neg(y\,R\,x)$,
- **sovisna:** $\forall x, y \in A \,.\, x \neq y \Rightarrow x\,R\,y \vee y\,R\,x$,
- **strogo sovisna:** $\forall x, y \in A \,.\, x\,R\,y \vee y\,R\,x$.

Refleksivna R:

$=$

$\leq$ na $\mathbb{R}$

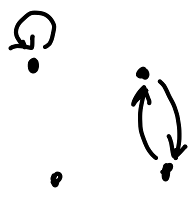


ima vse zanke

Simetrična:

$=$

~~$\leq$ na~~ $\mathbb{R}$



če imamo $x \to y$,

tudi $y \to x$

Antisimetrična:

$\leq$ na $\mathbb{R}$

$\emptyset$ na A

$$\forall x, y \in A.\ x\,\emptyset\,y \wedge y\,\emptyset\,x \Rightarrow x = y$$

$$\bot \wedge \bot$$

$$\underbrace{\bot \Rightarrow x = y}_{\top}$$

relacija deljivosti na $\mathbb{N}$:

$$n \mid m \text{ in } m \mid n \overset{?}{\Rightarrow} m = n \quad \checkmark$$

relacije deljivosti na $\mathbb{Z}$:

$$a \mid b \text{ in } b \mid a \overset{?}{\Rightarrow} a = b$$

$$2 \mid -2 \text{ in } -2 \mid 2 \text{ vendar } 2 \neq -2$$

- <u>tranzitivna</u>: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$=$ ✓

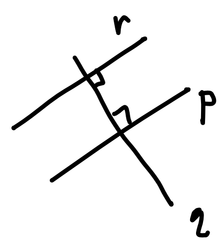
$<$ na $\mathbb{R}$ ✓

$\neq$ na $\mathbb{N}$: NE ker $1 \neq 2 \wedge 2 \neq 1$ vendar $1 \neq 1$ ne velja

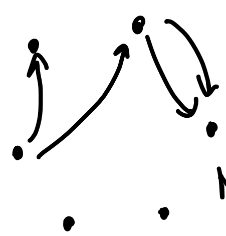
vzporednost premic ✓

pravokotnost v ravnini: NE

v prostoru: NE



- <u>irefleksivna</u>: $\forall x \in A . \neg(xRx)$



(ni negacija refleksivnosti!)

pišemo $\neg(xRy)$ kot $x \not R y$

Primeri: $x \neq y$

$x \nmid y$

$x \nparallel y$

Operacije na relacijah

$R, S \subseteq A \times B$

- unija $R \cup S \subseteq A \times B$
- presek $R \cap S \subseteq A \times B$
- komplement $R^c \subseteq A \times B$

Primeri:

(a) $\leq$ in $\geq$ na $\mathbb{R}$

$\leq \cap \geq \; = \; =$

$\forall x, y \in \mathbb{R}. \; x (\leq \cap \geq) y \Leftrightarrow x = y$

$\leq \cup \geq$ polna na $\mathbb{R}$

(b) $<$ in $>$ na $\mathbb{R}$

$< \cup > \; = \; \neq$

(c) $<$ na $\mathbb{R}$, $<^c = \geq$

Transponiranje

$R \subseteq A \times B$

transponiranka $R^T \subseteq B \times A$

$R^T := \{ (y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R \}$

$$y R^T x :\Leftrightarrow x R y$$

<u>Primer:</u>

$<$ na $\mathbb{R}$: $\quad <^T$ je $>$

$$y <^T x \Leftrightarrow x < y \Leftrightarrow y > x$$

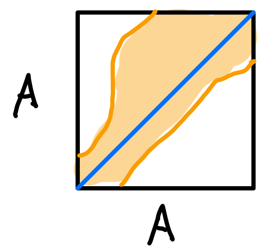
$=^T$ je $=$

Lastnosti relacij izražene z operacijami:

- R je refleksivna:

$$\Delta_A \subseteq R$$

R refleksivna $\Updownarrow$ vsebuje diagonalo

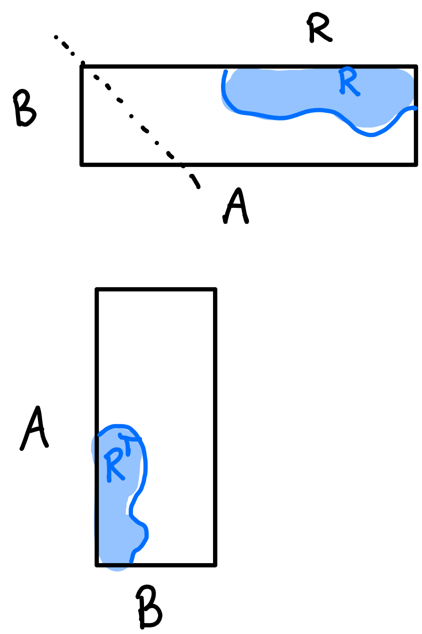


- R je simetrična:

$\forall x,y \in \mathbb{R}.\ xRy \Rightarrow yRx$

ekvivalentno:

$\forall x,y \in \mathbb{R}.\ xRy \Leftrightarrow yRx$



$R \subseteq A \times A$ simetrična $\Leftrightarrow R = R^T$

<u>Kompozitum relacij</u>

$R \subseteq A \times B$ in $S \subseteq B \times C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, squiggly, "R"] \arrow[rr, squiggly, bend right, "S \circ R"'] & B \arrow[r, squiggly, "S"] & C \end{tikzcd}$$

kompozitum $S \circ R \subseteq A \times C$

$$x\,(S \circ R)\,z \;:\Longleftrightarrow\; \exists y \in B \,.\, x R y \wedge y S z$$

<u>Primer</u>:

R: "x je otrok od y"

S: "z je mati od y"

$S \circ R$: "z je babica od x."

$$x \xrightarrow{\text{otrok od}} \exists\, y \xrightarrow{z \text{ mati od } y} z$$

L množica ljudi

$R := \{(x,y) \in L \times L \mid x \text{ otrok od } y\}$

$S := \{(y,z) \in L \times L \mid z \text{ je mati od } y\}$

y-onova mati je z

$$x \xrightarrow{R} y \xrightarrow{S} z$$

<u>Izrek</u>: Kompozitum relacij je asociativen:

$$A \overset{R}{\rightsquigarrow} B \overset{S}{\rightsquigarrow} C \overset{T}{\rightsquigarrow} D$$

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

Diagonala je nevtralni element:

$$\Delta_B \circ R = R = R \circ \Delta_A$$

<u>Potenca</u> relacije $R \subseteq A \times A$

$$R^n := \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}$$

$R^2 = R \circ R$

$R^3 = R \circ R \circ R$

$R^1 = R$

$R^0 = \Delta_A$ da velja $R^{n+m} = R^n \circ R^m$

tudi za $n=0$: $R^m = R^{0+m} = R^0 \circ R^m$

$= \Delta_A \circ R^m$

$= R^m$ ✓