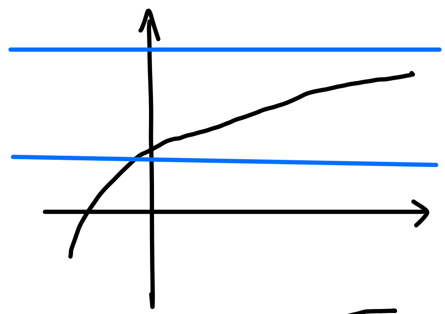
Lastnosti preslikav

$f: A \to B$

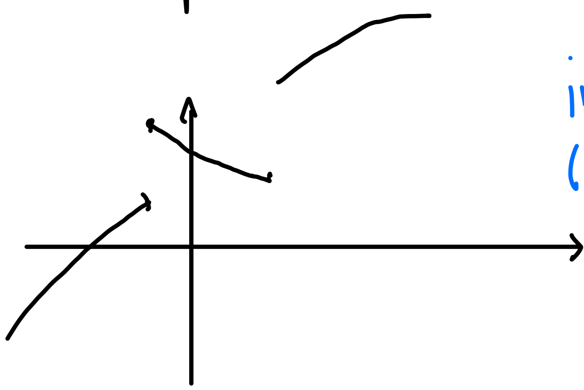
- <u>injektivna</u>: $\forall x, y \in A .\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

  ekvivalentno:

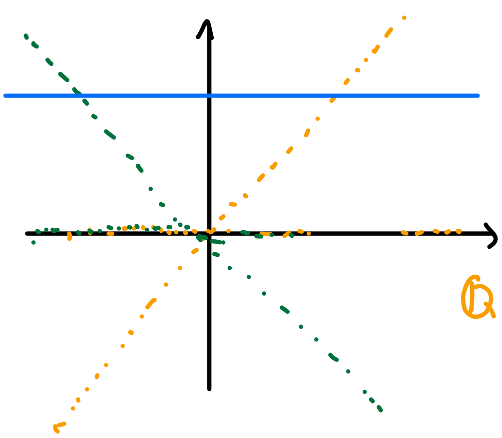
  $\forall x, y \in A .\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$



seka graf največ enkrat



injektivna (ni naraščajoča, ni padajoča)

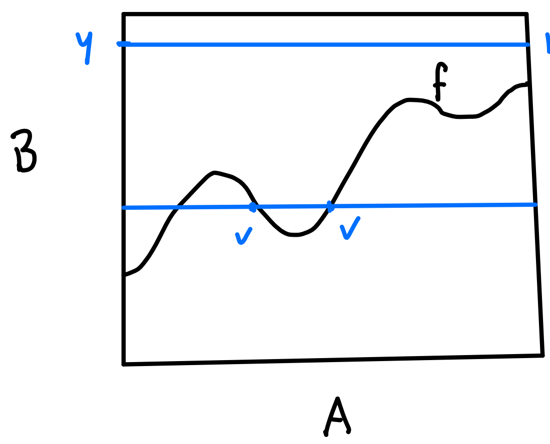


$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{če je } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{če je } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f: A \to B$

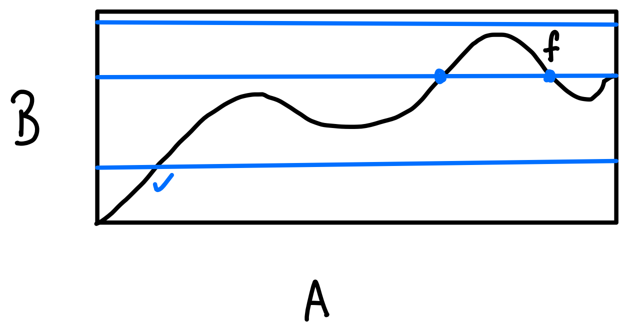
<u>surjektivna</u>: $\forall y \in B.\ \exists x \in A.\ y = f(x).$



ne seka f $\Rightarrow$ f ni surjektivna

<u>bijektivna</u>: injektivna & surjektivna

ekvivalenten: $\forall y \in B.\ \exists!\, x \in A.\ y = f(x)$



ni bijektivna

seka natanko enkrat

Monomorfizmi & epimorfizmi

matrike

$$\cancel{A} \cdot B = \cancel{A} \cdot C \ ?$$ ali smemo krajšati?

$$B = C$$

$$B \cdot \cancel{A} = C \cdot \cancel{A} \ ?$$

Def: Preslikava $f: A \to B$ je

- **monomorfizem** (**mono**), ko jo lahko krajšamo na levi:

$$\forall C \in Set. \underbrace{\forall g, h \in A^C}. \; f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

zapis: $\forall g, h : C \to A.$

$$C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

$\forall \varepsilon > 0 . \varphi$ okrajšava za
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} . \varepsilon > 0 \Rightarrow \varphi$
$\exists \delta > 0 . \varphi$ za
$\exists \delta \in \mathbb{R} . \delta > 0 \wedge \varphi$

- **epimorfizem** (**epi**), ko jo lahko krajšamo na desni

$$\forall D \in Set. \; \forall g, h : B \to D. \; g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

SMEŠNO

$$A \xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} D$$

Izrek (17) Naj bosta $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Velja:

1) Kompozicija monomorfizmov je monomorfizem
2) -||- epi -||- epi
3) Če je $g \circ f$ mono, potem je f mono.
4) Če je $g \circ f$ epi, potem je g epi.

Dokaz.

1) Predpostavimo f mono
g mono

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Dokažimo $g \circ f$ mono:

Naj bo $C \in$ Set.

Naj bosta $h, k : C \to A$.

Dokažimo: $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k \Rightarrow h = k$

Predpostavimo: $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$

(asociativnost $\circ$)

$$\cancel{g} \circ (f \circ h) = \cancel{g} \circ (f \circ h)$$

$$(3+\cancel{x})^2 = (3-2\cancel{x})^2$$

(g mono)

$$\cancel{f} \circ h = \cancel{f} \circ k$$

$$h = k$$

3) Če $g \circ f$ mono, je f mono:

Ideja:

$$f \circ h = f \circ k \quad / g \circ -$$

$$g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$$

asoc.

$$\cancel{(g \circ f)} \circ h = \cancel{(g \circ f)} \circ k$$

$$h = k$$

Izrek: Naj bo $f : A \to B$.

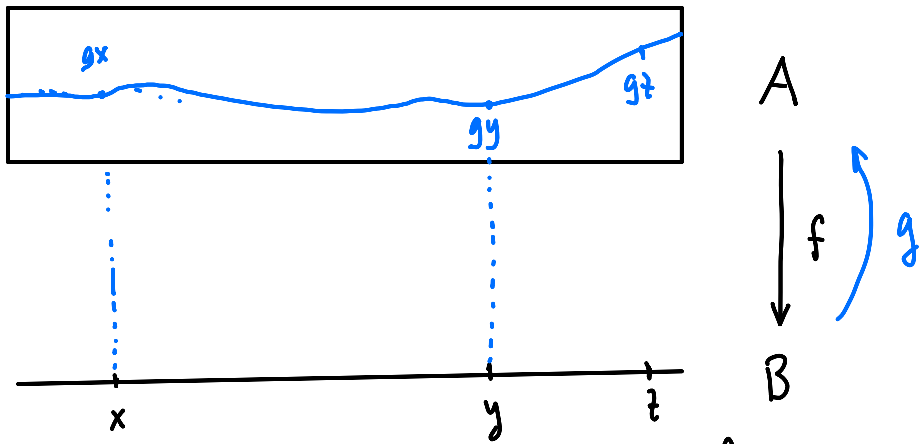
1) f mono $\Leftrightarrow$ f injektivna
2) f epi $\Leftrightarrow$ f surjektivna
3) f epi & mono $\Leftrightarrow$ f bijektivna $\Leftrightarrow$ f izomorfizem

Dokaz: glej zapiske

Retrakcija in prerez:

Def: Če sta $f: A \to B$ in $g: B \to A$ taki, da velja $f \circ g = id_B$, pravimo:

- f je *retrakcija* ali *levi inverz* g
- g je *prerez* ali *desni inverz* f.



Izrek: Retrakcija je epi, prerez je mono.

Dokaz: Imamo zgornjo sliko in $f \circ g = id_B$.

$$f \circ g = id_B$$

izrek (17)

id_B mono $\Rightarrow$ $f \circ g$ mono $\Rightarrow$ g mono

id_B epi $\Rightarrow$ $f \circ g$ epi $\Rightarrow$ f epi $\square$

Izpeljane množice:

Naj bo $f : A \to B$. Izpeljana množica je

$$\{ f(x) \mid x \in A \} := \{ y \in B \mid \exists x \in A .\, f(x) = y \}$$

Izpeljana množica s pogojem:

$$\{ f(x) \mid x \in A \mid \varphi(x) \} := \{ y \in B \mid \exists x \in A .\, \varphi(x) \land f(x) = y \}$$

Običajno pišemo kot

$$\{ f(x) \mid x \in A \land \varphi(x) \}$$

Primeri:

$$\{ n^2 \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots \}$$

$$\{ x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{R} \} = [1, \infty)$$

$$\{ n^2 \mid n \in \mathbb{N} \land n \text{ praštevilo} \} = \{ 4, 9, 25, 49, 121, \dots \}$$

Slike in praslike:

Def: Naj bo $f : A \to B$.

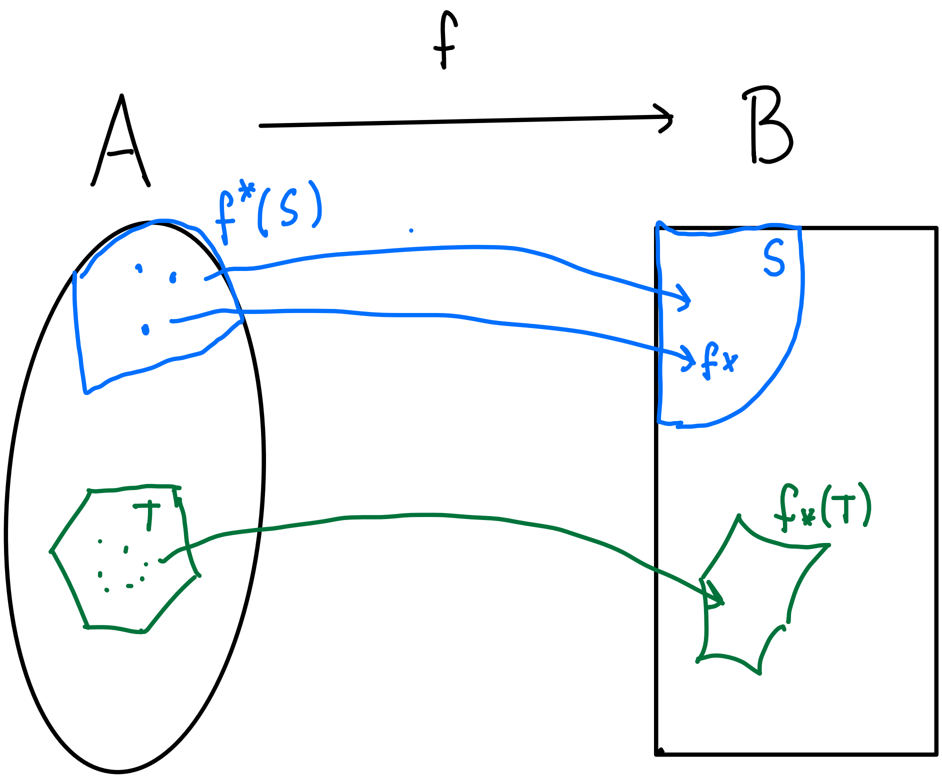
- praslika $S \subseteq B$ je $f^*(S) := \{ x \in A \mid f(x) \in S \} \subseteq A$
- slika $T \subseteq A$ je $f_*(T) := \{ y \in B \mid \exists x \in T .\, f(x) = y \} \subseteq B$
  $= \{ f(x) \mid x \in T \}$

Običajni zapis:

$f^*(S)$ piše $f^{-1}(S)$
$f_*(S)$ piše $f(S)$

zmešnjava
f^{-1} NE POMENI INVERZ f!

$f(S)$?!
$S \subseteq A$ in ne $S \notin A$.



Def: Zaloga vrednosti $f: A \to B$ je $f_*(A)$.

Kaj pa $f^*(B)$?

$$f^*(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\} = A$$

$$f^*(\emptyset) = \emptyset$$

$$f_*(A) = B \Leftrightarrow f \text{ surjektivna } \checkmark$$

Pomni:

$$f^*(T \underset{\cap}{\cup} V) = f^*(T) \underset{\cap}{\cup} f^*(V)$$

$$f_*(S \cup U) = f_*(S) \cup f_*(U)$$

$$f_*(S \cap U) \subseteq f_*(S) \cap f_*(U)$$ [$\supseteq$ velja, če f injektivna]