Podmnožice & potenčne množice

$A \subseteq B$ "podmnožica"

$\Updownarrow$

$\forall x \in A \,.\, x \in B$

$P(A)$ "potenčna množica"

Vzorec, kako uvedemo konstrukcijo

Spomnimo se:

- Konstrukcija : $A \times B$
- elementi : (x, y)
- uporaba : pr_1, pr_2
- enačbe : $pr_1(x,y) = x$

Konstrukcija podmnožic:

- Konstrukcija : $\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$

  pogoj, ki določa, kateri elementi iz A so v podmnožici

  Pišemo tudi:
  $\{ x \in A \,;\, \varphi(x) \}$

  $\cancel{\{ x \mid \varphi(x) \}}$

- elementi :
  če je $a \in A$ in velja $\varphi(a)$,
  potem $a \in \{ x \in A \mid \varphi(x) \}$

- uporaba :
  če $u \in \{ x \in A \mid \varphi(x) \}$,
  potem vemo $u \in A$ in $\varphi(u)$.

- enakost : za $u, v \in \{ x \in A \mid \varphi(x) \}$
  velja $u = v$ (glede na podmnožico $\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$)
  natanko tedaj ko $u = v$ (glede na A)

  Z drugimi besedami:
  Podmnožica ima ista pravila za enakost kot njena nadmnožica.

Primer: $\{ t \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{pr_1(t)^2 + pr_2(t)^2} = 1 \}$

enotska krožnica

$\{ n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} .\ n = k^2 \}$

podmnožica popolnih kvadratov

Karakteristične funkcije

$2 = \{\bot, \top\}$

Def: Karakteristična funkcija na množici A je funkcija z domeno A in kodomeno 2.

Primer:

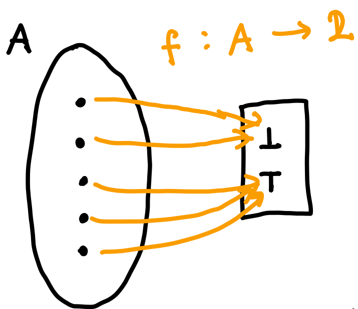
$$\mathrm{sodo} : \mathbb{N} \longrightarrow 2$$
$$n \longmapsto \begin{cases} \bot & \text{če } \neg \exists k \in \mathbb{N} .\ n = 2k \\ \top & \text{če } \exists k \in \mathbb{N} .\ n = 2k \end{cases}$$

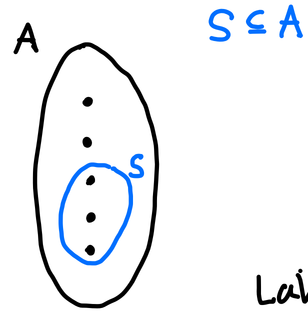
boljši zapis:

$$n \mapsto (\exists k \in \mathbb{N} .\ n = 2k)$$

2^A množica vseh karakterističnih preslikav na A $\quad Y^X$

Izrek: $2^A \cong P(A)$





$$F : 2^A \longrightarrow P(A)$$
$$f \longmapsto \{ x \in A \mid f(x) \}$$

Lahko bi pisali $\{x \in A \mid f(x) = \top\}$ a ni treba

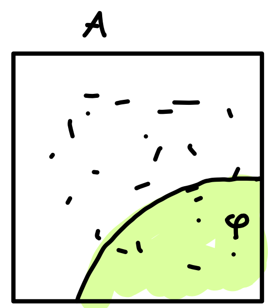
$$G : P(A) \longrightarrow 2^A$$

$$S \longmapsto (\underset{\in A}{x} \longmapsto (x \in S))$$

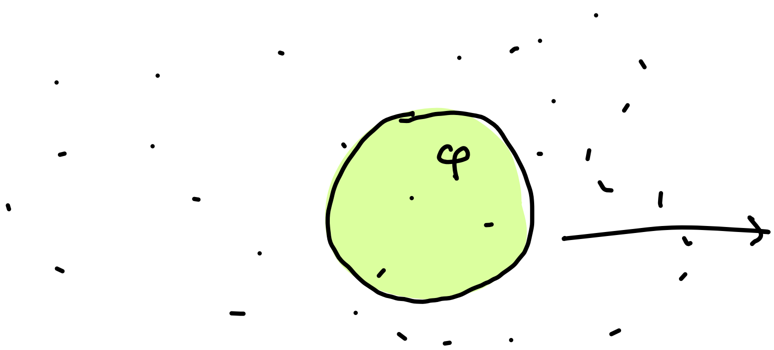
Lahko bi pisali $x \mapsto \begin{cases} \top & \text{če } x \in S \\ \bot & \text{če } x \notin S \end{cases}$

Razredi & družine

Podmnožica: $\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$



Ideja:



$\{ x \mid \varphi(x) \}$

vsi x-i, ki zadoščajo φ

Russellov paradoks:

$\neg(S \in S)$

$$R := \{ S \mid S \notin S \}$$

$$a \in \{x \mid \varphi(x)\} \Updownarrow \varphi(a)$$

Ali je $R \in R$?

1) Dokažimo, da $R \notin R$:

Predpostavimo $R \in R$. Iščemo protislovje.

Ker $R \in \{S \mid S \notin S\}$, sledi $R \notin R$, protislovje.

2) Ker $R \notin R$, sledi $R \in \{S \mid S \notin S\}$, torej $R \in R$

Torej smo dokazali $R \notin R$ in $R \in R$, protislovje.

Imamo dve vrsti "skupkov":

- razredi imajo za elemente : urelementi in množice
- množice imajo za elemente : urelementi in množice

Imamo tudi :

- urelementi : objekti, ki niso skupki (naravna števila)

Torej : Množice smejo biti elementi (množic in razredov).

Izjava, ki govori o razredu kot elementu, ni smiselna.

$\{x \mid \varphi(x)\} \in C$ NESMISEL

$S \in C$

Ali smo razrešili Russellov paradoks ?

$R := \{ S \mid S \notin S \}$

množica ali razred ?

Razred, zato je izjava $R \in R$ neveljavna (ni pravilno formulirana)

Pravila :

Razred definiramo z zapisom

$\{ x \mid \varphi(x) \}$ elementi so vsi urelementi in množice, ki zadoščajo φ

Množice konstruiramo z operacijami : $\times, +, Y^X, P(X), \ldots$

Vsaka množica je razred. Če je S množica, ima iste elemente kot razred $\{x \mid x \in S\}$, torej $S = \{x \mid x \in S\}$.

Pravi razred je razred, ki ni množica:

- Russelov razred $R := \{ S \mid S \notin S \}$
- $\mathrm{Set} = V =$ razred vseh množic
- razred vseh vektorskih prostorov, vseh grup,

Pozor: "potenčni razred"

C razred, $P(C)$ → razred vseh podrazredov C ? ✗
→ razred vseh podmnožic C ✓

Družine množic

X_A $A := \cdots$
X_B $B := \cdots$
X_C $C := \cdots$
X_D $D := \cdots$

$A_1 := \cdots$
$A_2 := \cdots$
$A_3 := \cdots$
$\vdots$

$k \in \mathbb{N}$

$V_k := \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists j \in \mathbb{N} .\, n = k \cdot j \}$

$V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots$

Def: **Družina množic** je preslikava iz neke množice I (indeksna) v razred množic:

$$A : I \longrightarrow \mathrm{Set}$$

A ↑ družina, I ↑ indeksna

Pišemo A_i namesto $A(i)$.

Primer: $I = \{1, 2, 3, 6\}$

$$A : \begin{array}{l} 1 \mapsto \emptyset \\ 2 \mapsto \mathbb{N} \\ 3 \mapsto \{42\} \end{array}$$

$A_1 := \emptyset$
$A_2 := \mathbb{N}$
$A_3 := \{42\}$
$A_6 := \emptyset$

$6 \mapsto \emptyset$

Primer:

$$I = \{42, 13, \sqrt{2}, \emptyset, \mathbb{R}\} \qquad S : I \to \mathrm{Set}$$

$S_{42} = \{42\}$

$S_{13} = \{3\}$

$S_{\sqrt{2}} = \{1, 2\}$

$S_{\emptyset} = \{$  $\}$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{N}$

Primer:

$$I = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a < b\}$$

$$A : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a,b) \mapsto \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

družina vseh odprtih intervalov

Prazna družina $A : I \to \mathrm{Set}$ ..... $I = \emptyset$

Družina praznih $A : I \to \mathrm{Set}$ ..... $A_i = \emptyset$ za vse $i \in I$

Razlika med

$$\{\{1,2\}, \{3\}, \{5,6\}\}$$

$A : \{*, \square, \Delta\} \to \mathrm{Set}$

$A_* = \{1,2\}$

$A_\square = \{3\}$

$A_\Delta = \{5,6\}$

Konstrukcije na družinah: $\bigcup, \bigcap, \prod, \coprod$