Boolova algebra

Resnični nostne tabele

$2+2=5$ resničnostna vrednost $\begin{cases} \top & \text{resnica} \\ \bot & \text{neresnica} \end{cases}$

$\bot \vee (\top \Rightarrow \top)$

Izjava s spremenljivkami (parametri): $x, y \in \mathbb{N}$

$x + 2y < 3$

x	y	$x+2y<3$
0	0	$\top$
0	1	$\top$
1	0	$\top$
2	0	$\top$
1	1	$\bot$
0	2	$\bot$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

<u>Izjavna spremenljivka</u> ali izjavni simbol zavzema vrednosti $\bot$ in $\top$.

$\mathbf{2} := \{\bot, \top\}$

Naj bo $p \in \mathbf{2}$ ← izjavna spremenljivka

p	q	$\neg p \vee q$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$

Resničnostna tabela

Izjava $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ določa preslikavo

izjavne spremenljivke $p_1 \dots p_n$

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n} \to 2$$

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) \mapsto \varphi(p_1, \dots, p_n)$$

Primer:

$$2 \times 2 \to 2$$

$$\{\perp, \top\} \times \{\perp, \top\} \to \{\perp, \top\}$$

$$(p, q) \mapsto \neg p \vee q$$

Boolova preslikava

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n} \to 2$$

2^n vrstic

p_1	....	p_n	$\varphi(p_1 \dots p_n)$
$\perp$	.....	$\perp$	$\perp$
$\perp$	......	$\top$	$\top$
$\perp$	..... $\top$	$\perp$	
	$\vdots$		
$\top$	.....	$\top$	

Skupaj 2^{2^n} resničnostnih tabel

Tavtologija je izjava, ki ima vrednost $\top$ za vse vrednosti parametrov.

Izrek: Naj bo φ izjava, v kateri nastopajo le izj. spr. $p_1, \dots p_n$:

$$\varphi \text{ tavtologija} \Leftrightarrow \varphi \text{ ima dokaz}$$

Opomba: Velja za izjave, ki imajo samo izj. sprem. in sestavljena iz $\neg, \bot, \top, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

(Ne sme imeti $\forall, \exists$, sprem. $x \in \mathbb{N}$ ipd.)

kilo Byte : $1024 = 2^{10}$

mega : $1048576 = 2^{20}$

giga : $= 2^{30}$

stanj : $2^{2^{30}}$

veselje : 2^{100}

Polni nabor:

p	q	?
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$

Odgovor: $p \oplus q$

Disjunktivna oblika:

p	q	?
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$

"2. vrstica" $\vee$ "3. vrstica"

$$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

Disjunktivna normalna oblika:

$$(\ldots \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \ldots) \vee (\quad) \vee (\quad)$$

izjavna sprem. ali njena negacija

Primer: $(r \wedge \neg q) \vee (p \wedge p \wedge \neg r) \vee (q)$

Konjuktivna normalna oblika:

$$(\ldots \vee \ldots \vee \ldots \vee \ldots) \wedge (\quad) \wedge (\quad)$$

p	q	?
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$

"nismo v 1. vrstici" $\wedge$ "nismo v 4. vrstici"

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

Vsako resničnostno tabelo lahko zapišemo z uporabo $\underbrace{\wedge, \vee \text{ in } \neg}_{\text{POLNI NABOR VEZNIKOV}}$.

- $\vee, \neg$ je polni nabor, ker $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
- NAND $p | q$

p	q	$\mathrm{NAND}(p, q)$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$

je poln nabor

Kaj pa $\vee, \wedge$?
NI POLN NABOR.

p	?
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

$((p \wedge p) \vee p) \vee p$
$\perp$
$\top$

$\mathrm{NAND}(p, p) = \neg(p \wedge p) = \neg p$

$\neg(\neg(p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$.

$\perp \Rightarrow p$

$\top$

$\perp$

Boolova algebra:

$P \Leftrightarrow Q$ kadar imata P in Q isto resničnostno vrednost

Pišemo $P = Q$ "imata isto resničnostno vrednost"

Resničnostna vrednost $\neq$ pomen!

"Pitagorov izrek" $=$ "Adicijski izrek za sin"

$\top$ ista vrednost $\top$

Računska pravila za izjavni račun

(gledali smo zapiske)

$$p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

$$p + (q \cdot r) = (p + q) \cdot (p + r) \quad ?!$$ NE

Izrek: $\forall x \in \emptyset . \varphi(x)$.

Dokaz:

Naj bo $x \in \emptyset$.

Dokazujemo $\varphi(x)$.

Dokažimo $\bot$:

1) $x \in \emptyset$: hipoteza

2) $x \notin \emptyset$: definicija prazne množice

$\blacksquare$

Podmnožice in potenčne množice

S <u>podmnožica</u> T, pišemo $S \subseteq T$

$$S \subseteq T \;:\Longleftrightarrow\; \forall x \in S.\ x \in T$$

"vsak element S je element T"

$$S = T \;\Longleftrightarrow\; S \subseteq T \wedge T \subseteq S$$

princip ekstenzionalnosti

<u>Potenčna množica</u>:

$P(S)$ je množica, njeni elementi so podmnožice S

<u>Primer</u>:

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$P(\{*\}) = \{\emptyset, \{*\}\}$$

$$P(\{a,b,c\}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\}\}$$

Presek: $A \cap B := \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

Unija: $A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

Komplement podmnožice $S \subseteq A$ je

$$S^c := \{ x \in A \mid x \notin S \}$$

$P(A)$ tvori <u>Boolovo algebro</u> z operacijami

$\perp$ ..... $\emptyset$

$\top$ .... A

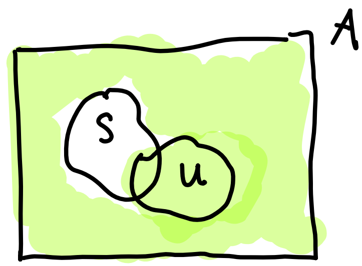
$p \wedge q$ .... $S \cap U$

$p \vee q$ .... $S \cup U$

$\neg p$ .... S^c

$p \Rightarrow q$ .... $S^c \cup U$

$\neg p \vee q$



"$S \Rightarrow U$"

$$(S \cup U)^c = S^c \cap U^c$$