

Še o dokazih

Cilj: kaj trenutno dokazujemo?

Kontekst: • spremenljivke, ki so veljavna
• hipoteze / predpostavke

Pravila sklepanja:

- zamenjava enakih: če $\varphi(a)$ in $a=b$, potem $\varphi(b)$
- zamenjava ekvivalentnih:
v dokazu lahko cilj ali hipotezo zamenjajamo z ekvivalentno izjavo

Primer: Reševanje enačbe:

$$2x + 3x^2 = 8 - 6x \quad | +6x$$

$$2x + 3x^2 + 6x = 8 \quad | -8$$

$$2x + 3x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$3x^2 + 8x - 8 = 0$$

∴

$$x = \dots \text{ ali } x = \dots$$

Pravila sklepanja:

• vpeljawa: kako se dokaže izjavo

• disjunkcija:

① Dokazujemo $A \vee B$:

• dokazemo A : ...

② Dokazujemo $A \vee B$:

• dokazemo B : ...

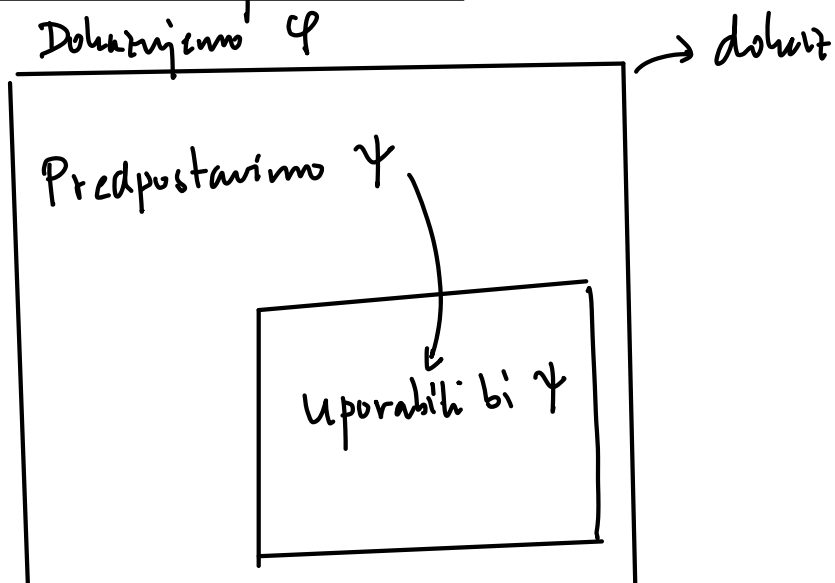
• $\exists x \in A. \varphi(x)$

Dokaz:

Podamo $x :=$ (nekí element A).

Preverimo, da dani element, zadošča φ .

Pravila uporabe:



Konjunkcija (gledali smo zapiske v PDF)

Primer:

$\forall n \in \mathbb{N}. n > 2 \wedge \text{"n je prašteilo"} \Rightarrow n \text{ liho}$

Uporabimo: vstavimo $n := 17$:

$17 > 2 \wedge 17 \text{ prašteilo} \Rightarrow 17 \text{ liho} \quad \checkmark$
T \wedge T

vstavimo $n := 18$:

$18 > 2 \wedge 18 \text{ prašteilo} \Rightarrow 18 \text{ liho} \quad \checkmark$

Pravilo o izključeni tretji možnosti &
dokat s protislovjem

Pravilo izkl. tretje možnosti:

$$\phi \vee \neg \phi$$

za vsako izjavo ϕ

Klasična logika: $\phi \vee \neg \phi$

Intuicionistična logika: brez tega pravila

Ponovimo: vpeljava negacije

Dokazujemo $\neg \varphi$.

- predpostavimo φ :
(dokazemo neresnico oz. **pisicemo protislovje**)

Primer: $\neg (\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_{>0})$.

Predpostavimo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Torej imamo $a, b \in \mathbb{N}$, da je $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ in a in b sta tuji števili.

Predpostavka: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2$$

Sledi, da je a^2 sod, torej a sod.

Obstaja $c \in \mathbb{N}$, da je $a = 2c$.

$$2b^2 = (2c)^2$$

$$2b^2 = 4c^2$$

$$b^2 = 2c^2 \Rightarrow b \text{ sod}$$

Imamo: $\left. \begin{array}{l} \bullet a \text{ in } b \text{ tuji} \\ \bullet a \text{ in } b \text{ sodi} \end{array} \right\} \text{protislovje}$



QED

"quite easily done"

konca dokaza

Ponovimo: vpeljava negacije

Dokazujemo $\neg \varphi$.

- predpostavimo φ :
(dokazemo neresnico oz. poiščemo protislovje)

Dokaz s protislovjem:

RAZLIČNI PRAVILI

Dokazujemo φ .

- predpostavimo $\neg \varphi$:
(dokazemo neresnico oz. poiščemo protislovje)

Ali velja $\varphi \Leftrightarrow \neg \neg \varphi$? To je ekvivalentno dokazovanju s protislovjem.

Imamo:

- ① Vpeljava negacije
- ② Izključena tretja možnost
- ③ Dokaz s protislovjem

Matematiki obe pravili uporabijo z besedami "dokaz s protislovjem"

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \textcircled{3}$$

Kaj pa:

④

za vsako izjavo φ velja $\varphi \oplus \neg \varphi$

ekskluzivni ali

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \textcircled{4}$$

Pravimo, da se izjavi A in B izključujeta, če $\neg(A \wedge B)$
(nista obe resnični).

Veja: če se A in B izključujeta, potem je

$$A \vee B \Leftrightarrow A \oplus B$$

Boolova algebra