Kvantifikatorja $\forall$ in $\exists$

$((0,0),(0,0))$?!

$$\alpha + 0 = (a,b) + (0,0)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \,.\, x^2 - 1 > a \lor x + 8 < -5$$

$$\int_0^1 (3^x + a \sin x \cdot \log x)\, dx \qquad \iint_S dx\,dy\; f(x,y) + g(x)\cdot \log y$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \,.\, \Big((x > a) \Rightarrow (x^2 - a < 7) \lor (\exists y \in \mathbb{N} \,.\, (y = y))\Big)$$

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R} \,.\, (x > a \Rightarrow x^2 - a < 7)\Big) \lor \exists y \in \mathbb{N} \,.\, y = y$$

$$\neg\Big(\exists x \in \mathbb{Z} \,.\, \big(\exists y \in \mathbb{Z} \,.\, (x^2 + y^2 = 3758)\big)\Big)$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} \,.\, \Big(\neg\big(\exists y \in \mathbb{Z} \,.\, (x^2 + y^2 = 3758)\big)\Big)$$

Vezane in proste spremenljivke

Naj bo $a, b \in \mathbb{R}$:

VEZANA z $\int$

$$\int_0^1 (x + a^2)\, dx = \int_0^1 (y + a^2)\, dy = \frac{1}{2} + a^2$$

$$\int_0^1 (x + a^2)\, dx = \frac{1}{2} + a^2$$

Prosta
(prosti parameter)

$$\int_0^1 (x + a^2)\, da = \frac{1}{3} + x$$

$$\int_0^1 (x + b^2)\, dx = \frac{1}{2} + b^2$$

Ali je $\frac{1}{2}+a^2 = \frac{1}{2}+b^2$? Odvisno od a in b.

$\forall x \in \mathbb{R}.\ x^2 + a > 0.$ Drži? Odvisno od a.

$\equiv$

Primer: Če $a = 0$ NE DRŽI

če $a = 17$ DRŽI

$\forall y \in \mathbb{R}.\ y^2 + a > 0.$

$\not\equiv$

$\forall a \in \mathbb{R}.\ a^2 + a > 0.$

$\uparrow$

a se je ujel v $\forall$!!

a se ujame v $\int$

$$\int_0^1 (x+a^2)\,dx \neq \int_0^1 (a+a^2)\,da = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 (x+a^2)\,dx = \frac{1}{2}+a^2$$

Kaj pa

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 1 \qquad / -\frac{1}{3}x^3$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 2 \qquad \Rightarrow 1 = 2 \ ?!$$

$$\int (x \mapsto x^2) = (x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + C)$$

$$= (y \mapsto \frac{1}{3}y^3 + C)$$

$\forall a \in \mathbb{O}.\ a \heartsuit b$ $\qquad$ $\forall a \in \mathbb{O} (\exists b \in \mathbb{O}.\ a \heartsuit b)$

Definicije & dokazi

Enolični obstoj:

$\exists x \in A \,.\, \varphi(x)$ "obstaja (vsaj en) $x \in A$, da $\varphi(x)$"

$\exists! x \in A \,.\, \varphi(x)$ "obstaja enoličen (natanko en) $x \in A$, da $\varphi(x)$"

$\exists x \in \mathbb{R} \,.\, x^2 = 1$ ✓

$\exists! x \in \mathbb{R} \,.\, x^2 = 1$ ✗

$\exists! x \in A \,.\, \varphi(x)$ je okrajšava za

$$\underbrace{\left(\exists x \in A \,.\, \varphi(x)\right)}_{\text{"vsaj en"}} \land \underbrace{\left(\forall y \in A \,.\, \forall z \in A \,.\, \varphi(y) \land \varphi(z) \Rightarrow y = z\right)}_{\text{"največ en"}}$$

Operator enoličnega opisa

Če dokažemo $\exists! x \in A \,.\, \varphi(x)$

potem lahko pišemo $\iota x \in A \,.\, \varphi x$ "tisti element A, ki zadošča φ"

iota

VEZANA SPREMENLJIVKA

"tisti x iz A, ki zadošča $\varphi(x)$."

$$\iota x \in \mathbb{R} \,.\, (x > 0 \land x^2 = 2) = \sqrt{2}$$

Definicije

Definicija simbola

$$s := \ldots$$

Pišemo tudi $s = \ldots$

$s \triangleq \ldots$

Namesto $f := (x \mapsto \ldots)$ pišemo $f(x) := \ldots$

Namesto $r := \iota x \in A . \varphi(x)$ pišemo z besedami
"Naj bo r tisti element A, za katerega $\varphi(r)$."

Namesto $\varphi := (\exists x \in \mathbb{R} . x^3 - x < a)$ pišemo

$$\varphi :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} . x^3 - x < a$$

Def: Zaporedje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je neomejeno, če za vsak $x \in \mathbb{R}$ obstaja $i \in \mathbb{N}$, da je $a_i > x$.

$$\text{neomejeno}(a) := \forall x \in \mathbb{R} . \exists i \in \mathbb{N} . a_i > x.$$

$$\text{neomejeno} := (a \mapsto \forall x \in \mathbb{R} . \exists i \in \mathbb{N} . a_i > x)$$

Konst~~ur~~rukcije & dokazi

Dokaz je utemeljitev izjave.

Dokaz sestoji iz sklepov, ki tvorijo poddokaze (tvorijo drevo).

V vsakem koraku dokaza imamo:

- CILJ → izjava, ki jo trenutno dokazujemo
- KONTEKST → trenutno veljavne definicije,
  proste spremenljivke,
  hipoteze (predpostavke)

Dokaz upošteva PRAVILA SKLEPANJA: