Aksiomi

Zermelo
Fraenkel
C (choice)

1. Ekstenzionalnost
2. Neurejeni par : $\{x, y\}$
3. Unija : $\bigcup A$
4. Prazna množica : $\emptyset$
5. Neskončna množica : $\emptyset \in S$
   $x \in S \Rightarrow x^+ \in S$ $\quad x^+ = x \cup \{x\}$

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \dots$ hereditarno končne

ω $\mathbb{N}$

6. Podmnožica :
   Če je S množica in φ predikat na S,
   je $\{x \in S \mid \varphi(x)\}$ množica in
   $$y \in \{x \in S \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow y \in S \land \varphi(y)$$
7. Potenčna množica :
   Če je S množica, potem je $\mathcal{P}(S)$ množica in
   $$x \in \mathcal{P}(S) \Leftrightarrow x \subseteq S$$

$$\forall S. \exists T. \forall x. (x \in T \Leftrightarrow \forall y. y \in x \Rightarrow y \in S)$$

?

S prvimi 7 aksiomi:

- hereditarno končne
- $\mathbb{N}$, ω,
  $P(\mathbb{N})$, $P(P(\mathbb{N}))$, $P(P(P(\mathbb{N})))$, ...

$$A \cap B = \{ x \in A \mid x \in B \}$$

$$A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A, y \in B \}$$

$$\{ \underbrace{\{\{x\}, \{x,y\}\}}_{\in P(P(A \cup B))} \mid x \in A, y \in B \}$$

x A

y B

$\{x,y\} \subseteq A \cup B$

$\in P(A \cup B)$

$\{x\} \in P(A) \subseteq P(A \cup B)$

$$A \times B = \{ u \in P(P(A \cup B)) \mid \exists x \in A . \exists y \in B . u = \{\{x\}, \{x,y\}\} \}$$

potenčna unija podmnožica

Vaja: B^A $A+B$ A/R } dovolj za analizo, algebro, ...

Lahko tvorimo: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $P(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

"Manjka":

$$A : \mathbb{N} \to Set$$

$$A_0 = \mathbb{N}$$

$$A_{n+1} = P(A_n)$$

$$A_4 = P(P(P(P(\mathbb{N}))))$$

Kako tvorimo $\bigcup_n A_n$?

Aksiom o uniji: Množica množic ima unijo

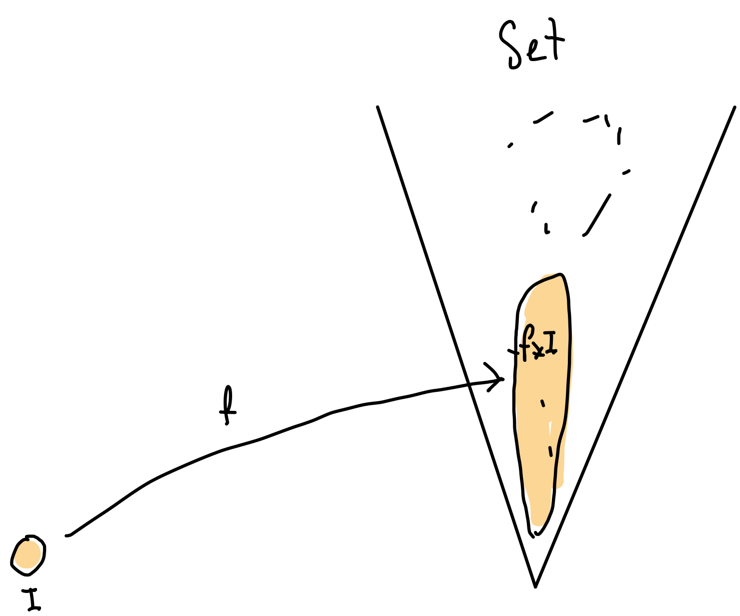
$$\bigcup_n A_n = \bigcup \underbrace{\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{množica}} \quad \{\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), P(P(\mathbb{N})), \dots\} = \mathrm{im}(A)$$

slika A

prvih 7 aksiomov ne omogoča te množice

8. Zamenjava (replacement):

Slika funkcije $I \to Set$, kjer je I množica, je množica.



9. Dobra osnovanost: Relacija $\in$ je dobro osnovana.

($\Leftarrow$ aksiom regularnosti)

$S = \{0, \{0, \{0, \{0, \{\dots\}\}\}\}\}$ ali tako množico imamo?

se ponavlja

$S = \{0, S\}$? Dobra osnovanost tega ne dovoli.

$\dots \in S \in S \in S$

Ker $\in$ ne bila dobro osnovana relacija.

10. Aksiom izbire:

Družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.

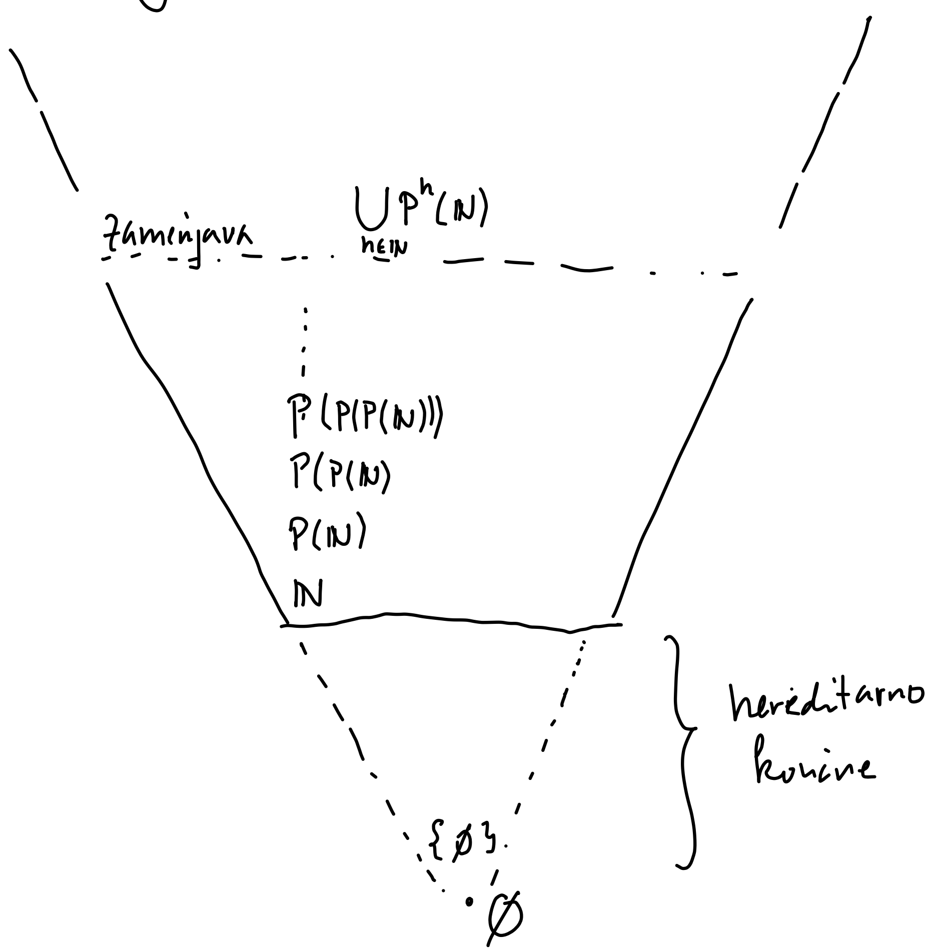
$\Leftrightarrow$

Če za množico $\underbrace{S \text{ velja } \forall x \in S.\, x \neq \emptyset}_{S \text{ je množica nepraznih množic}}$, potem obstaja $f : S \to \bigcup S$, da je $\forall x \in S.\, f(x) \in x$.

funkcija izbire

Kumulativna hierarhija

Kako "izgleda" razred vseh množic?



Razred vseh množic gradimo po stopnjah, ki jih oštevilčimo z ordinalnimi števili:

$$V_0 := \emptyset$$
$$V_1 := P(V_0) = \{\emptyset\}$$
$$V_2 := P(V_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$V_3 := P(V_2) = \dots \quad (4\ \text{elementi})$$
$$\vdots$$

} hereditarno končne

$$V_\omega := \bigcup_{\alpha<\omega} V_\alpha$$ množica vseh hereditarno končnih množic, vsebuje $\mathbb{N}$ kot podmnožico, $\mathbb{N} \subseteq V_\omega$

limitni ordinal (ni neposredni naslednik)

$$V_{\omega+1} := P(V_\omega)$$ vsebuje $\mathbb{N}$ kot element, $\mathbb{N} \in V_{\omega+1}$

$$V_{\omega+2}$$
$$\vdots$$
$$V_{\omega+\omega} := \bigcup_{\alpha<\omega+\omega} V_\alpha$$ tu potrebujemo aksiom o zamenjavi.
$$\vdots$$

Splošna formula:

$$V_{\alpha+1} := P(V_\alpha)$$
$$V_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha \qquad \beta \text{ limitni ordinal}$$

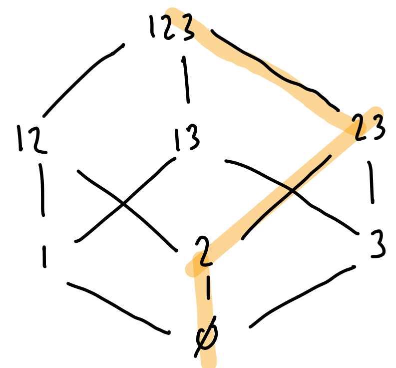
<u>Izrek</u>: $$\mathrm{Set} := \bigcup_{\alpha\in \mathrm{On}} V_\alpha$$

Aksiom izbire & Zornova lema

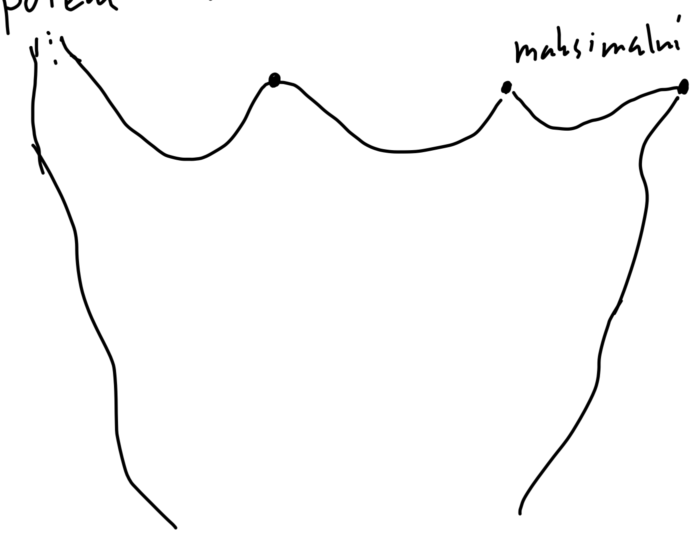
Def: Veriga v delni urejenosti $(P, \leq)$ je taka $V \subseteq P$, ki je z $\leq$ linearno urejena: $\forall x, y \in V.\ x \leq y \vee y \leq x$.

Primeri:

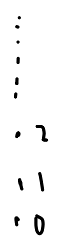
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq$



Zornova lema: Če ima v delni urejenosti $(P, \leq)$ vsaka veriga zgornjo mejo, potem ima P maksimalni element.

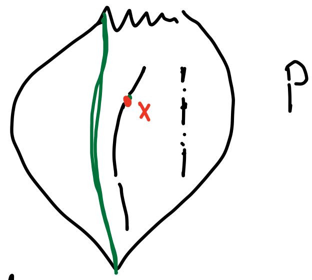


$\mathbb{N}, \leq$



Dokaz (ideja)

$C := \{V \subseteq P \mid V \text{ veriga}\}$, delno urejena z $\subseteq$.



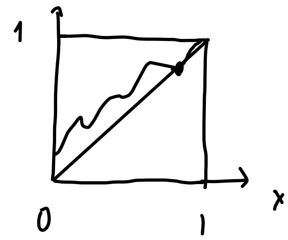
Definiramo $f : C \to C$

$$f(V) := \begin{cases} V & \text{če je } V \text{ maksimalna v } C \\ V \cup \{x\} & \text{kjer } x \text{ izberemo tako, da je } x \notin V \text{ in } V \cup \{x\} \text{ je veriga} \end{cases}$$

Bourbaki-Wittov izrek zagotavlja, da obstaja $V \in C$, da je $V = f(V)$.

$f : [0,1] \to [0,1]$

$x \leq f(x)$



Ta V je maksimalna veriga

V ima zgornjo mejo $m \in P$:

m je maksimalni element:

Denimo, da za $y \in P$ velja $m \leq y$.

Dokažimo $m = y$.

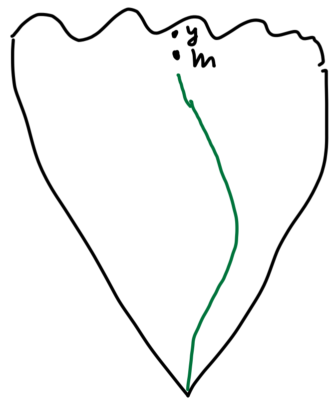
Ker je m zg. meja za V in $m \leq y$, je $V \cup \{y\}$ je veriga:

Velja $V \subseteq V \cup \{y\}$ in V maksimalna v C

$\Rightarrow V = V \cup \{y\}$.

Torej $y \in V$. Torej $y \leq m$, ker je m zg. meja za V

Imamo $m \leq y$ in $y \leq m \Rightarrow y = m$. ∎



Izrek: V teoriji množic **brez** aksioma izbire so ekvivalentne:

1. Aksiom izbire
2. Zornova lema
3. Princip dobre urejenosti:

    Vsako množico lahko dobro uredimo.

$(3 \Rightarrow 1)$

$A : I \to \mathrm{Set}$ $\qquad A_i \neq \emptyset$ neprazna

iščemo $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ in $f(i) \in A_i$ za vse $i \in I$.

Dobro uredimo $\bigcup_{i \in I} A_i$ in $f(i) :=$ prvi element A_i. $\blacksquare$

Izrek: Vsak vektorski prostor ima bazo.

Dokaz: Naj bo L vektorski prostor.

Definiramo

$$P := \{ B \subseteq L \mid B \text{ je linearno neodvisna} \}$$

uredimo z $\subseteq$.

Naj bo $V \subseteq P$ veriga lin. neodv. podmnožic L.

V ima zgornjo mejo, namreč $\bigcup_{B \in V} V$.

Po Zornovi lemi obstaja maksimalni element P,

ta je baza L. $\blacksquare$