Ordinalna števila

Dobra osnovanost: relacija $\sqsubset$ na A, ekvivalentno je:

- $\sqsubset$ je dobro osnovana
- vsaka neprazna $S \subseteq A$ ima $\sqsubseteq$-minimalni element
- $\sqsubset$ nima padajoče verige.

Dobra urejenost: stroga linearna + dobro osnovana

$\ldots \ldots \ldots \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$

a) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

b) $1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, \ldots$

c) $0, 2, 4, 6, 8, \ldots\ldots, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

<u>Def</u>: Dobri urejenosti $(P, <_P)$ in $(Q, <_Q)$ sta <u>izomorfni</u>, če obstajata strogo monotoni preslikavi $f: P \to Q$ in $g: Q \to P$, ki sta inverzni: $f \circ g = id_Q$ in $g \circ f = id_P$.

Ordinalna števila: izbor predstavnikov za ekvivalenčne razrede glede na izomorfnost dobrih urejenosti.

$\bullet \longrightarrow \bullet$

von Neumann: "Ordinalno število je množica ordinalnih števil, ki so manjša."

$\emptyset$

$[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$

$n := \{0, 1, \dots, n-1\}$

$0 := \emptyset$

$1 := \{0\} = \{\emptyset\}$

$2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 := \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\vdots$

$\omega := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}$

Ideja: Ordinalno število je množica svojih predhodnikov, dobro urejeno z $\in$.

|||....

$\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ |||....|

$\omega + 2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \dots\}$ |||....||

$\omega + 4$

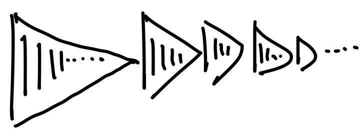
$\vdots$

$\omega + \omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots\}$ |||||....|||....

$\vdots$

$\omega + \omega + \omega$ |||||....|||....|||....

$\vdots$

$\omega \cdot \omega =$ 

ω^3

ω^ω

$\vdots$

Def: Množica A je <u>tranzitivna</u>, če iz $x \in y$ in $y \in A$ sledi $x \in A$.

Primer: $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ je tranzitivna

$$A = \{\emptyset, \underbrace{\{\emptyset, \overbrace{\{\emptyset\}}^{x}\}}_{y}\}$$ ni tranzitivna

$x \in y$ vendar $x \notin A$

Def: <u>Ordinalno število</u> je tranzitivna množica, ki je dobro urejena z relacijo $\in$.

Izrek: Če je α ordinalno število in $\beta \in \alpha$, je β tudi ordinalno število.

Izrek: Razred ordinalnih števil On je izbor predstavnikov za izomorfnost dobre urejenosti.

$|n|$ je "n"

$|\omega| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

$|\omega+1| = |\omega| = \aleph_0$

$|\omega+\omega| = \aleph_0$

$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\omega+1 = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}$

$\omega+\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \dots\}$

Def: Ordinalno število α je <u>kardinalno število</u>, če iz $\beta \in \alpha$ sledi $\underbrace{|\beta| < |\alpha|}$.

to pomeni: obstaja injekcija $\beta \to \alpha$ in <u>ne</u> obstaja injektivna $\alpha \to \beta$.

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad \omega \quad \omega+1 \quad \omega+2 \quad \omega+3 \cdots \omega+\omega \cdots$

$\checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \quad \checkmark \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times$

$\aleph_0$

prvi ordinal, ki ni števna množica ω_1

$\aleph_1$

Kodiranje matematičnih objektov z množicami

"Vse je množica!"

Matematični objekti kot množice:

- naravna števila so množice:

$$0 = \emptyset$$
$$1 = \{\emptyset\}$$
$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$\vdots$$

- preslikavo $f: A \to B$ predstavimo kot funkcijsko relacijo $\underset{\text{množica}}{R} \subseteq A \times B$

- kvocient $A/\sim$ je množica ekviv. razredov, so spet množice

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ in } y \in B\}$$

Kako kodiramo urejeni par (x, y)?

Kuratowski: $(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}$

$$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\},\{y,x\}\} = \{\{y,y,x,y\},\{x,x\}\}$$

$$\{\{7\},\underbrace{\{8,7\}}_{=\{7,8\}}\} = (7,8)$$

$$\{\{8\},\{8,7\}\} = (8,7)$$

$$\{\{3\}\} = \{\{3\},\{3,3\}\} = (3,3)$$

$A+B$?

$$in_1(x) = (x,0) = \{\{x\},\{x,\emptyset\}\}$$

$$in_2(y) = (y,1) = \{\{y\},\{y,\{\emptyset\}\}\}$$

3-5 10-12

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$$

$$(a,b) \sim (c,d) :\Longleftrightarrow a+d = b+c$$

$a-b$ $c-d$

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\}))/\approx$$

$$(a,b) \approx (c,d) :\Longleftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} = [(a,b)]_\approx$$

$$\mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$$

$$0 \in \mathbb{R} \qquad 0 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$$

$\downarrow$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \qquad i = (0,1)$$

a

$$(a,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1)$$

$$a + b\cdot i$$

Zermelo-Fraenkelovi aksiomi

"Vse je množica"

1. Ekstenzionalnost:

   Množici, ki imata enake elemente, sta enaki

2. Neurejeni par:

   za vsak x in y, je $\{x,y\}$ množica in

   $$z \in \{x,y\} \Leftrightarrow z = x \vee z = y$$

   Okrajšava $\{x\} = \{x,x\}$.

3. Unija: za vsako množico A je $\bigcup A$ množica in

   $$z \in \bigcup A \Leftrightarrow \exists B \in A .\, z \in B$$

4. Prazna množica: $\emptyset$ je množica in

   $$z \in \emptyset \Leftrightarrow \bot$$

   $$\neg (z \in \emptyset)$$

$\emptyset$

$\{\emptyset\}$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\{x,y,z\} = \{x,y\} \cup \{z\}$

$= \bigcup \{\{x,y\}, \{z\}\}$

5. Neskončna množica:

   Definiramo naslednik $x^+ = x \cup \{x\}$ na množicah

   $3^+ = \{0,1,2\}^+ = \{0,1,2,\overbrace{\{0,1,2\}}^{3}\}$

   $= \{0,1,2,3\} = 4$

   Obstaja množica S, ki zadošča

   $$\emptyset \in S \text{ in } \forall x \in S .\, x^+ \in S.$$

$0 = \emptyset \in S$ S lahko vsebuje tudi "smeti" (niso ordinali)

$1 = 0^+ \in S$ $\omega \subseteq S$ izluščimo kasneje.

$2 = 1^+ \in S$

6. Podmnožica
7. Potenčna množica
8. Zamenjava
9. Dobra osnovanost
10. Aksiom izbire