Indukcija & dobra osnovanost

Indukcija na $\mathbb{N}$:

ind. hipoteza

$$\underbrace{\varphi(0)}_{\text{osnova}} \wedge \underbrace{(\forall k \in \mathbb{N}.\ \varphi(k) \Rightarrow \varphi(k+1))}_{\text{indukcijski korak}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}.\ \varphi(n)$$

$$\forall S \in P(\mathbb{N}).\ \overset{(1)}{0 \in S} \wedge \overset{(2)}{(\forall k \in \mathbb{N}.\ k \in S \Rightarrow k+1 \in S)} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

$\Updownarrow$ "k je neposredni predhodnik"

$$\forall S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\,(\forall m \in \mathbb{N}.\,\underbrace{(\forall k \in \mathbb{N}.\,k^+ = m \Rightarrow k \in S)}_{\text{"vsi predhodniki } m \text{ so v } S\text{"}} \Rightarrow m \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}. \qquad (*)$$

V (*) vstavimo $m := 0$:

$$(\forall k \in \mathbb{N}.\ k^+ = 0 \Rightarrow k \in S) \Rightarrow 0 \in S$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}.\ \bot \Rightarrow k \in S) \Rightarrow 0 \in S$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}.\ \top) \Rightarrow 0 \in S$$

$$\top \Rightarrow 0 \in S$$

$$0 \in S$$

V (*) vstavimo $m := j^+$ dobimo:

$$\underbrace{(\forall k \in \mathbb{N}.\ k^+ = j^+ \Rightarrow k \in S)}_{j \in S} \Rightarrow j^+ \in S \qquad (\Leftarrow)$$

$$j \in S \Rightarrow j^+ \in S$$

Krepka indukcija

"k je predhodnik od m"

$$\forall S \in P(\mathbb{N}).\ \Big(\forall m \in \mathbb{N}.\ \big(\forall k \in \mathbb{N}.\ k < m \Rightarrow k \in S\big) \Rightarrow m \in S\Big) \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Rekurzija: Konstruiramo funkcije na $\mathbb{N}$:

$f : \mathbb{N} \to A$

$f(0) := 1$

$f(n+1) := (n+1) \cdot f(n)$

Indukcija: Dokazujemo lastnosti števil.

Def: Relacija $R \subseteq A \times A$ je <u>dobro osnovana</u>, če zadošča "induktivnemu principu"

$$\forall S \in P(A).\ \underbrace{\big(\forall x \in A.\ (\forall y \in A.\ y R x \Rightarrow y \in S) \Rightarrow x \in S\big)}_{S \text{ je progresivna za } R} \Rightarrow S = A$$

Primer: dvojiška drevesa

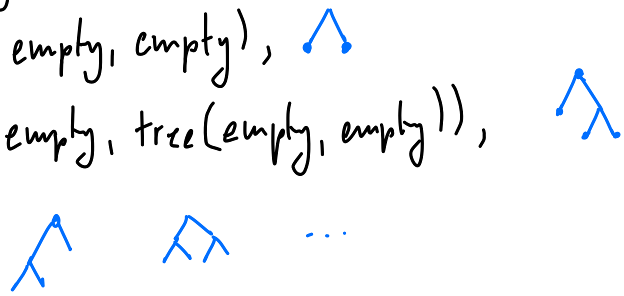
Induktivno definiramo množico Tree:

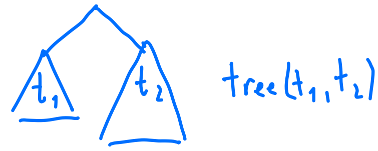
- $\mathrm{empty} \in \mathrm{Tree}$
- če $t_1, t_2 \in \mathrm{Tree}$ potem $\mathrm{tree}(t_1, t_2) \in \mathrm{Tree}$

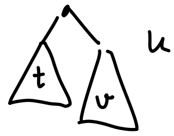
Induktivno $\mathbb{N}$:

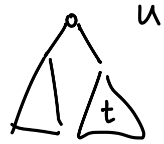
- $0 \in \mathbb{N}$
- če $n \in \mathbb{N}$, potem $n^+ \in \mathbb{N}$

$\mathrm{Tree} = \{ \mathrm{empty},$ ∙
$\mathrm{tree}(\mathrm{empty}, \mathrm{empty}),$
$\mathrm{tree}(\mathrm{empty}, \mathrm{tree}(\mathrm{empty}, \mathrm{empty})),$
$\dots$









Relacija "neposredni predhodnik" na Tree:

$$t \; R \; u \; :\Longleftrightarrow \; \exists_{v \in \mathrm{Tree}} . \; u = \mathrm{tree}(t, v) \lor u = \mathrm{tree}(v, t)$$

R je dobro osnovana (ne bomo dokazali)

Indukcija za dvojiška drevesa:

- osnova: $\varphi(\mathrm{empty})$
- indukcijski korak: za vse $t, v \in \mathrm{Tree}$, če $\varphi(t)$ in $\varphi(v)$, potem $\varphi(\mathrm{tree}(t, v))$

dve ind. hipotezi

Če velja osnova in ind. korak, potem $\forall u \in \mathrm{Tree} . \; \varphi(u)$.

<u>Def</u>: <u>Padajoča veriga</u> za relacijo $R \subseteq A \times A$ je $a : \mathbb{N} \to A$, da velja $a_{n+1} \, R \, a_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

Se pravi:

$$\dots \; R \; a_3 \; R \; a_2 \; R \; a_1 \; R \; a_0$$

<u>Primer</u>: Padajoča veriga za $\leq$ na $\mathbb{Z}$:

$$\dots \leq -8 \leq -6 \leq -4 \leq -2 \leq 0$$

Primer: Padajoča veriga za $>$ na $\mathbb{N}$:

$$\dots > 202200 > 20220 > 2022$$

Primer: Padajoča veriga za $\leq$ na $\mathbb{N}$:

$$\dots \leq 3 \leq 3 \leq 3 \leq 6 \leq 7$$

Padajoča veriga za $<$ na $\mathbb{N}$? Ne obstaja

Lema 15.6 *V dobri osnovanosti ni ciklov in ni padajočih verig.*

Primer: Relacija $<$ na $[0,1]$.
Ni dobro osnovana, ker imamo padajočo verigo $n \mapsto \frac{1}{n+1}$.

Dobra urejenost

Def: Relacija $R \subseteq A \times A$ je stroga urejenost, če je

- irefleksivna: $\forall x \in A.\ \neg(x R x)$
- tranzitivna: $\forall x, y, z \in A.\ x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

Linearna stroga urejenost, če je stroga in dodatno

- sovisna: $\forall x, y \in A.\ x R y \vee x = y \vee y R x$.

Primer: $<$ na $\mathbb{R}$ je stroga linearna.
$\subsetneq$ na $P(\mathbb{N})$ je stroga, ni linearna

Če je $\leq$ delna na A, potem je

$$x < y \;:\Longleftrightarrow\; x \leq y \wedge x \neq y \qquad \text{stroga}$$

Če je $<$ stroga na A, potem je

$$x \leq y \;:\Longleftrightarrow\; x < y \vee x = y \qquad \text{delna}$$

Definicija 15.9 Relacija je **dobra ureditev**, če je dobro osnovana in stroga linearna ureditev.

<u>Primer</u>: $(\mathbb{N}, <)$