Definicija 16.11 Množica A je **števna**, če velja velja $|A| \leq \aleph_0$.

$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ $\quad$ $|\aleph_0| = \aleph_0$

Definicija 16.12 Množica A je **neštevna**, če ni števna.

$|A| \leq |B| \mapsto \exists f : A \to B$ injekt.

Izrek 16.13 *Za vsako množico A so ekvivalentne naslednje izjave:*

1. *A je števna,*
2. *obstaja injektivna preslikava $A \to \mathbb{N}$,*
3. *A je prazna ali obstaja surjektivna preslikava $\mathbb{N} \to A$,*
4. *obstaja surjektivna preslikava $\mathbb{N} \to \mathbb{1} + A$,*
5. *A je končna ali izmoforna $\mathbb{N}$.*

$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

$\emptyset$: $()$, $()$, $()$, $()$, $()$, ...

(1⇔2) $\quad |A| \leq \aleph_0 \underset{\text{def. } \leq}{\Leftrightarrow} \exists f : A \to \mathbb{N}$. f injektivna

Izrek 16.9 $\overbrace{|A| \leq |B|}^{\text{obstaja injektivna } f : A \to B}$ *natanko tedaj, ko je $A = \emptyset$ ali obstaja surjekcija $B \to A$.*

Dokaz. Denimo, da je $f : A \to B$ injektivna in $A \neq \emptyset$. Torej obstaja neki $a \in A$. Definiramo preslikavo $g : B \to A$ takole:

$$g(y) = x :\Leftrightarrow f(x) = y \vee (y \notin f_*(A) \wedge x = a).$$

Povedano malo drugače:

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{če } y \in f_*(A), \\ a & \text{če } y \notin f_*(A). \end{cases}$$

Ker velja $g \circ f = \mathrm{id}_A$, je g retrakcija in zato surjektivna.

Obratno, denimo, da je A prazna ali obstaja surjekcija $f : B \to A$. Če je A prazna, je edina preslikava $\emptyset \to B$ injektivna. Če je $f : B \to A$ surjektivna, ima prerez (zakaj?), ki je injektivna preslikava. ∎

(2⇒3)

Denimo $f : A \to \mathbb{N}$ injektivna.

Uporabimo 16.9.

(3⇒4)

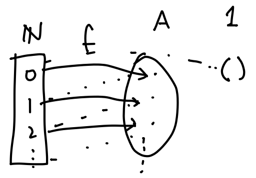
Dva primera

(i) če $A = \emptyset$:

Dokazujemo: obstaja surjektivna $\mathbb{N} \xrightarrow{g} 1 + \emptyset$

Podamo $g(n) = in_1(())$. Surjektivna, ker $g(42) = in_1(())$.

(ii) imamo surjektivno $f : \mathbb{N} \to A$.



Dokazujemo: obstaja surjektivna $\mathbb{N} \to 1 + A$

Podamo $g : \mathbb{N} \to 1 + A$

$$g(n) = \begin{cases} in_1(()) & , n = 0 \\ in_2(f(n-1)), & n > 0 \end{cases}$$

Preverimo: g surjektivna: $\quad in_1(()) = g(0)$

$in_2(x) = g(n+1)$ kjer je $n \in \mathbb{N}$ tak, da $f(n) = x$.

(4⇒5)

Imamo $r : \mathbb{N} \to 1 + A$ surjektivna.

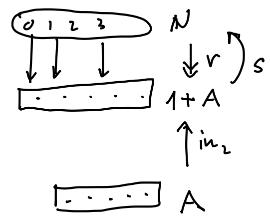
$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

Dokazujemo: A končna ali $A \cong \mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow$ $\quad A$ ni končna $\Rightarrow A \cong \mathbb{N}$

Predpostavimo A ni končna.

Dokazujemo $A \cong \mathbb{N}$.



Obstaja $s : 1 + A \to \mathbb{N}$, da je $r \circ s = id_{1+A}$.

Dobimo $s \circ in_2 : A \to \mathbb{N}$ je injektivna.

Ker A ni končna, obstaja injektivna $\mathbb{N} \to A$.

Uporabimo CSB izrek (sledi)

(5⇒1)

(i) A končna: $\quad A \overset{g}{\cong} [n] \subseteq \mathbb{N}$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

$i : A \to \mathbb{N}$

$x \mapsto g(x)$

(ii) če $A \cong \mathbb{N}$: seveda imamo injektivno $A \to \mathbb{N}$.

∎

Izrek (Cantor - Schröder - Bernstein)

$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$$

$$(\exists f: A \to B \text{ . injektivna } f) \wedge (\exists g: B \to A \text{ injektivna}) \Rightarrow (\exists h: A \to B \text{ . } h \text{ bijektivna})$$

Dokaz:

Imamo $f: A \to B$ injektivna
$g: B \to A$ injektivna

Iščemo $h: A \to B$ bijektivna.

$$C_0 := A \setminus g_*(B) \qquad \subseteq A$$

$$C_1 := g_*(f_*(C_0))$$

$$C_{n+1} := g_*(f_*(C_n)) \qquad \subseteq A$$

$$D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Definiramo $h: A \to B$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{če } x \in D \\ g^{-1}(x) & \text{če } x \in A \setminus D \end{cases}$$

$g: B \to A$ inj
$g: B \to g_*(B)$ bij

Preverimo: h injektivna:

Naj bo $x, y \in A$ in $h(x) = h(y)$. Dokazujemo $x = y$.

Štiri možnosti:

i) $x \in D, y \in D$:
$$f(x) = h(x) = h(y) = f(y) \xRightarrow{f \text{ inj}} x = y$$

ii) $x \in A \setminus D$, $y \in A \setminus D$
$$g^{-1}(x) = h(x) = h(y) = g^{-1}(y) \xRightarrow{g^{-1}: g_*(B) \to B \text{ bij}} x = y$$

iii) $x \in D$, $y \in A \setminus D$
$$f(x) = h(x) = h(y) = g^{-1}(y)$$
$$g(f(x)) = g(g^{-1}(y)) = y$$

$x \in C_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Torej je $y = g(f(x)) \in g_*(f_*(C_n)) = C_{n+1} \subseteq D$.
Torej $y \in A \setminus D$ in $y \in D$, protislovje. Ta primer se ne zgodi.
$\Rightarrow x = y$

iv) $x \in A \setminus D$, $y \in D$ Simetričen iii)

Dok. h surjektivna:

Naj bo $z \in B$. Iščemo $x \in A$, da velja $h(x) = z$.

Dva primera:

i) če $z \in f_*(D)$: obstaja $x' \in D$, da je $f(x') = z$.

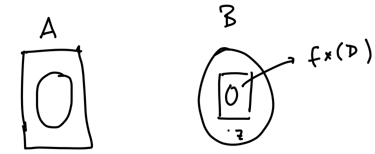
Tedaj $h(x') = f(x') = z$. Podamo $x := x'$.

ii) če $z \notin f_*(D)$: Podamo $x := g(z)$. Preverimo $h(x) = z$

Vidimo: če $x \notin D$, bo veljalo $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(g(z)) = z$.

Torej je treba dokazati $x \notin D$:

Če bi bil $x \in D$: $x \in C_n$ za nek $n \in \mathbb{N}$.



$$x = \underset{\substack{\cap \\ g_*(B)}}{g(z)} \notin A \setminus g_*(B) = C_0$$

Torej $n > 0$.

$$x \in C_n = g_*(f_*(C_{n-1}))$$

Torej obstaja $\underset{\substack{\cap\!\shortparallel \\ D}}{y \in C_{n-1}}$, da je $\underset{\substack{\shortparallel \\ g(z)}}{x = g(f(y))}$

$\Rightarrow z = f(y) \in f_*(D)$ protislovje ∎