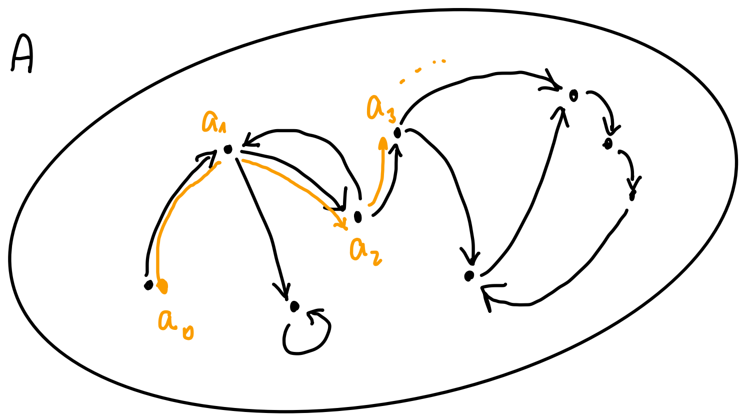
Moč množic

Aksiom odvisne izbire:

Naj bo A neprazna in $R \subseteq A \times A$ celovita $(\forall x \in A . \exists y \in A . x R y)$.
Tedaj obstaja taka $a : \mathbb{N} \to A$, da $a_n R a_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

(Sledi iz aksioma izbire.)



∞

Končne množice

Def: Standardna končna množica, $n \in \mathbb{N}$

$$[n] = \{ k \in \mathbb{N} \mid k < n \}$$

$[0] = \{\}$

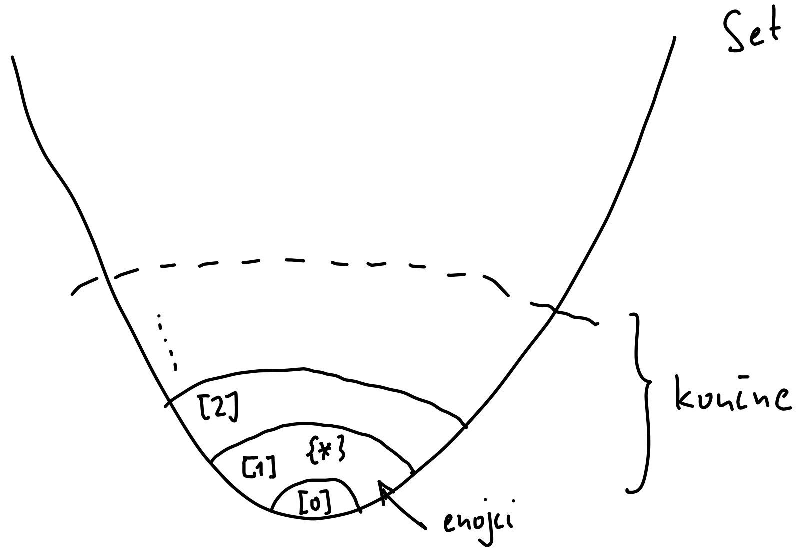
$[1] = \{0\}$

$[2] = \{0, 1\}$

$[3] = \{0, 1, 2\}$

$\vdots$

Def: Množica A je <u>končna</u>, če obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $A \cong [n]$.



$$A \cong [n] \text{ in } A \cong [m] \Rightarrow m = n$$

Torej lahko definiramo <u>moč končne množice</u>

$$|A| = n \;:\Longleftrightarrow\; A \cong [n].$$

$$A \xleftarrow{b} \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

$$\| $$

$$\{b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$$

$$|-| : \mathrm{KončneMnožice} \to \mathbb{N}$$

<u>Velja:</u>

$$|[n]| = n$$

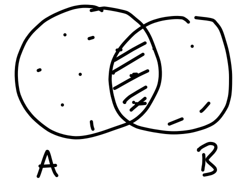
$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$$|A + B| = |A| + |B|$$

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

Pravilo vključitve in izključitve:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Neskončne množice

<u>Def</u>: Množica je <u>neskončna</u>, če ni končna.

<u>Izrek</u>: Množica A je neskončna $\Leftrightarrow$ obstaja injektivna $\mathbb{N} \to A$.

<u>Dokaz</u>:

$\boxed{\Rightarrow}$ Denimo, da A ni končna.

Konstruiramo injektivno $e : \mathbb{N} \to A$.

A ni prazna, ker $A \not\cong [0] = \emptyset$, torej obstaja $a \in A$.

Definiramo $e(0) := a$.

Denimo, da smo že definirali $e(0), \dots, e(n)$ in da so vse med seboj različne. Definiramo $e(n+1)$:

$e : \{0, \dots, n\} \to A$ injektiven

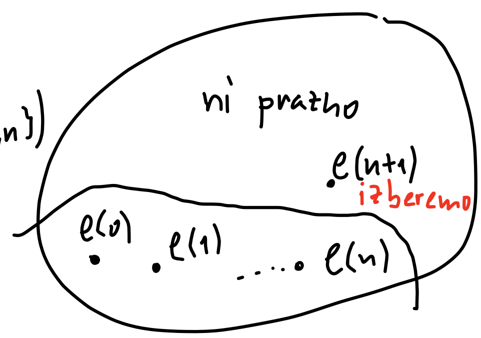
Če bi bil e surjektiven, bi bil bijektiven, torej bi imeli $[n+1] \cong A$, to ni res.

Torej e ni surjektiven.

Torej obstaja element v $A \setminus e_*(\{0, \dots, n\})$

<u>Izberemo</u>

$e(n+1) \in A \setminus e_*(\{0, \dots, n\})$



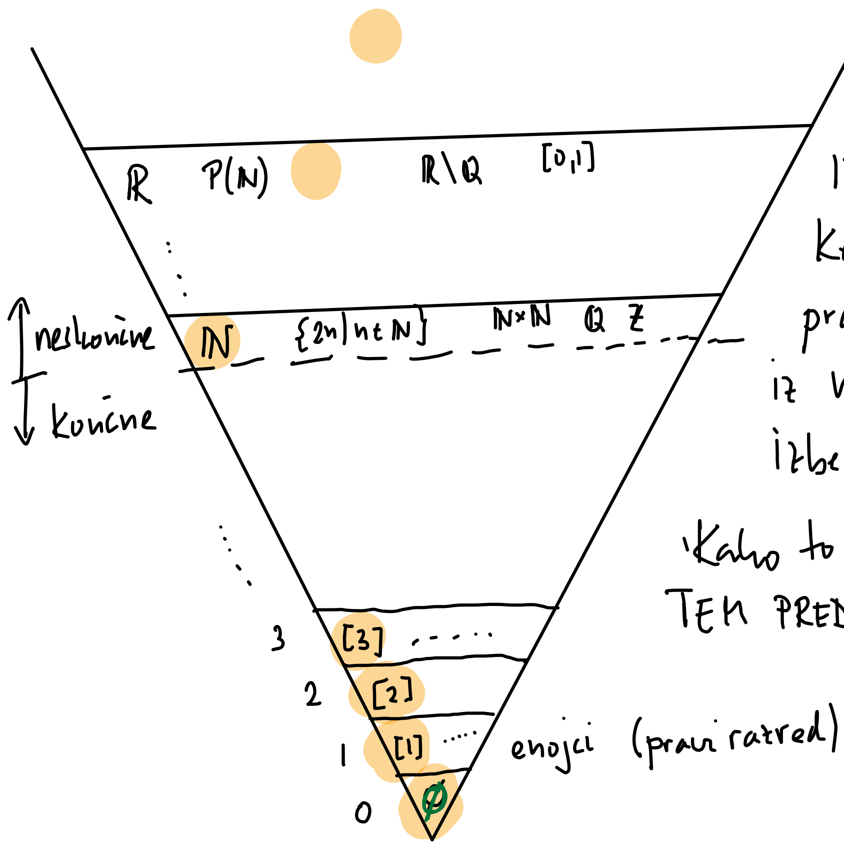
Denimo, da je $e : \mathbb{N} \to A$ injektivna.
Denimo, da bi $A \cong [n]$ za neki $n \in \mathbb{N}$,
torej imamo bijekcijo $f : A \to [n]$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "e", "\text{inj}"'] \arrow[rr, bend right, "f \circ e \text{ je injektivna}"'] & A \arrow[r, "f", "\text{bij}"'] & {[n]}
\end{tikzcd}
$$

Dobili bi injektivno $f \circ e : \mathbb{N} \to [n]$. Taka injekcija pa ne obstaja (dokaz opustimo). $\square$

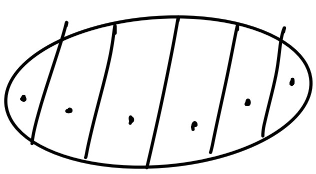
Moč splošnih množic

Set



IDEJA:
Ker so razredi za $\cong$ pravi razredi (preveliki), iz vsakega od njih izberemo PREDSTAVNIKA

Kako to naredimo??
TEM PREDSTAVNIKOM PRAVIMO
KARDINALNA ŠTEVILA.



$\mathrm{Set}/_{\cong}$ TEGA NE MOREMO TVORITI!
↓
"super-razred" pravih razred

Def: Množici A in B sta <u>ekvipolentni</u>, če sta izomorfni.

Kardinalna števila = predstavniki ekvivalenčnih razredov za ekvipolentnost
(kako jih dobimo, še ne vemo)

Def: <u>Moč množice</u> A je tisto kardinalno število K, za katero $A \cong K$. Moč označimo $|A|$.

Def: Naj bosta A in B množici:

- $|A| \leq |B|$, kadar obstaja injektivna preslikava $A \to B$
- $|A| < |B|$, kadar $|A| \leq |B|$ in $|A| \neq |B|$
- $|A| = |B|$, kadar $A \cong B$.

Relacija $\leq$ je:

- refleksivna $|A| \leq |A|$ ✓
- tranzitivna $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$
- antisimetrična $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$?

$$A \overset{f}{\rightarrowtail} B \qquad B \overset{g}{\rightarrowtail} A \qquad A \underset{\text{bij}}{\overset{?}{\longrightarrow}} B$$

Cantor-Schröder-Bernsteinov izrek
(prvi dokazal Dedekind)

- linearna (zakon <u>trihotomije</u>):

$$|A| < |B| \vee |A| = |B| \vee |B| < |A|$$

(ne bomo dokazali)

Izrek: $|A| \leq |B| \iff A = \emptyset$ ali obstaja surjektivna $B \to A$.

Cantorjev izrek: $|A| < |P(A)|$.

Dokaz:

1) $|A| \leq |P(A)|$: iščemo injektivno $f : A \to P(A)$

Podamo $f(x) := \{x\}$.

Naj bosta $x, y \in A$. $f(x) = f(y) \iff \{x\} = \{y\} \iff x = y$.

2) $|A| \neq |P(A)|$

Dokazujemo $\neg \exists f : A \to P(A).\ f$ bijektivna.

Zadostuje $\neg \exists g : A \to P(A).\ g$ surjektivna.

$\forall g : A \to P(A).\ g$ ni surjektivna.

Naj bo $g : A \to P(A)$. Dokazujemo:

g ni surjektivna $\iff$

$\neg \forall S \in P(A).\ \exists x \in A.\ g(x) = S \iff$

$\exists S \in P(A).\ \forall x \in A.\ g(x) \neq S$ ← dokazujemo

Podamo $S := \{y \in A \mid y \notin g(y)\}$. Preverimo:

1. $S \in P(A)$ ✓
2. $\forall x \in A.\ g(x) \neq S$:

Naj bo $x \in A$. Dokazujemo $g(x) \neq S$.

Predpostavimo $g(x) = S$ in iščemo protislovje:

- $x \notin S$:

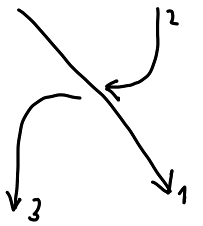
  če $x \in S$, potem po def. S sledi $x \notin g(x) = S$, protislovje

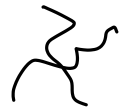
- $\neg(x \notin S)$: če bi $x \notin S$, potem po def S $\neg(x \notin g(x)) \iff \neg(x \notin S)$, protislovje

Definicija: Množica A je **števna**, kadar velja $|A| \leq \aleph_0$

Tu je $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$.

alef





$\aleph$ $\aleph$ $\aleph$

Množica je **neštevna**, če ni števna.

Ponedljek 27.12. se dobimo na Zoom (link bo objavljen) ob **9:00**.

$9^h = 9:15$

$9:00 = 9:00$

$10^h =$ četrt čez
čah ča