Delne urejenosti

<u>Definicija</u>: Relacija $R \subseteq A \times A$ je

- <u>šibka urejenost</u>: refleksivna & tranzitivna
- <u>delna urejenost</u>: refleksivna, tranzitivna & antisimetrična
  $\forall x,y \in A .\ xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
- <u>linearna urejenost</u>: delna urejenost & strogo sovisna
  $\forall x,y \in A .\ xRy \vee yRx$

Ponavadi uporabljamo simbole $\leq, \geq, \subseteq, \supseteq, \sqsubseteq, \sqsupseteq, \preceq, \ldots$

<u>Primeri</u>:

1. Deljivost na $\mathbb{N}$: delna $\quad a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\ b = a \cdot k$
2. Deljivost na $\mathbb{Z}$: šibka, ni antisimetrična $1 \mid -1$ in $-1 \mid 1$ vendar $1 \neq -1$.
3. $\leq$ na $\mathbb{R}$: linearna
4. $\subseteq$ na $P(A)$: $S, T, U \subseteq A$

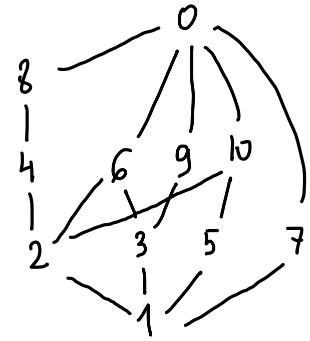
$$\left.\begin{array}{l} S \subseteq S \ \checkmark \\ S \subseteq T \subseteq U \Rightarrow S \subseteq U \ \checkmark \\ S \subseteq T \wedge T \subseteq S \Rightarrow S = T \ \checkmark \end{array}\right\} \text{delna}$$

v splošnem ni linearna $\quad P(\{0,1,2\})$

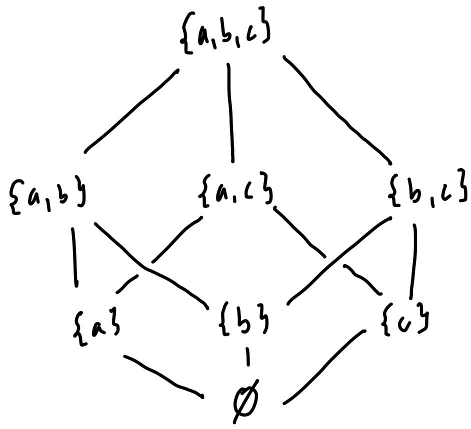
$\{1\} \nsubseteq \{2\}$ in $\{2\} \nsubseteq \{1\}$

<u>Hassejev diagram</u>: (delna urejenost)

Relacija $\mid$ na $\{0,1,2,\ldots,10\}$



Relacija $\subseteq$ na $P(\{a,b,c\})$



Operacije na urejenostih

Obratna urejenost: Če je $\leq$ na A delna, je tudi njena transpozicija $\leq^T$ delna. Pišemo jo $\geq$.

$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$$

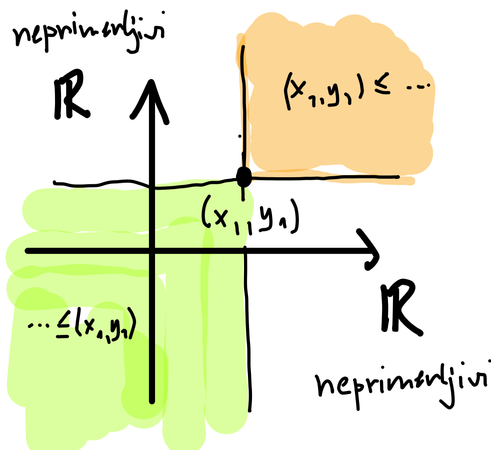
Če je $\leq$ linearna, je tudi $\geq$ linearna.

Produktna urejenost: $(P,\leq)$ in $(Q,\sqsubseteq)$ delni urejenosti

$P \times Q$ uredimo $\preccurlyeq$

$$(x_1,y_1) \preccurlyeq (x_2,y_2) :\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \sqsubseteq y_2$$

(v zapiskih je narobe)



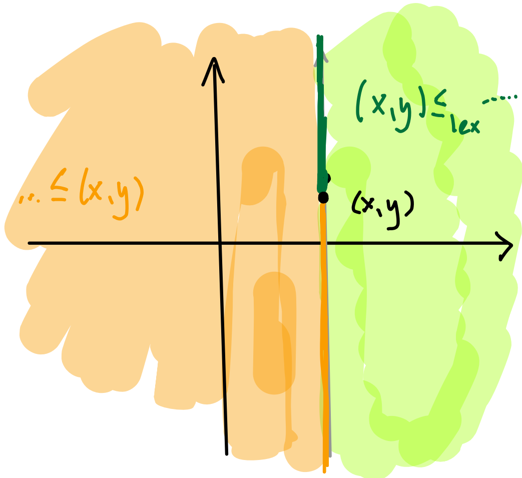
Leksikografska urejenost: $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$ delni.

$\leq_{lex}$ na $P \times Q$

$$(x_1, y_1) \leq_{lex} (x_2, y_2) \;:\Longleftrightarrow\; (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \leq_P x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq_Q y_2)$$

delna

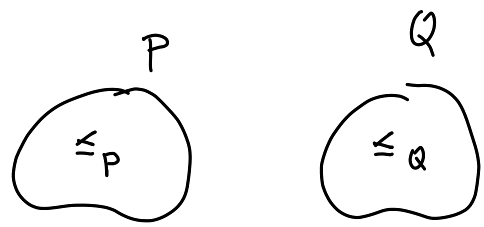
če $\leq_P$ in $\leq_Q$ linearni $\Rightarrow$ $\leq_{lex}$ linearna



$\leq_{lex}$ ta $\leq$ na $\mathbb{R}$

Vsota urejenosti

$\leq_{P+Q}$ na $P+Q$



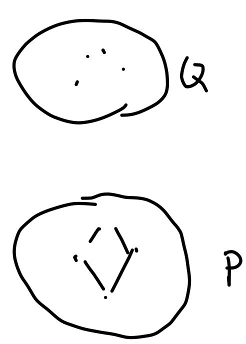
$u, v \in P+Q$

$$u \leq_{P+Q} v \;:\Longleftrightarrow\; (\exists x, y \in P.\ u = in_1(x) \wedge v = in_1(y) \wedge x \leq_P y) \vee$$
$$(\exists s, t \in Q.\ u = in_2(s) \wedge v = in_2(t) \wedge s \leq_Q t)$$

je delna.

Linearnost se ne ohranja.

Zaporedna vsota

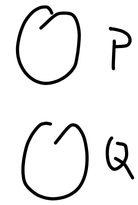


$\sqsubseteq$ na $P+Q$

$$u \sqsubseteq v \;:\Longleftrightarrow\; (\exists x, y \in P.\ u = in_1(x) \wedge v = in_1(y) \wedge x \leq_P y) \vee$$
$$(\exists s, t \in Q.\ u = in_2(s) \wedge v = in_2(t) \wedge s \leq_Q t) \vee$$
$$(\exists x \in P.\ \exists t \in Q.\ u = in_1(x) \wedge v = in_2(t))$$

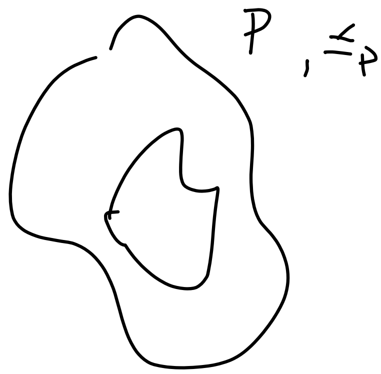
Ohranja linearnost

$\underset{u}{in_1(a)} \sqsubseteq \underset{v}{in_2(r)}$



Potenca urejenosti (preberi zapiske)

P^A $\qquad$ $(P, \leq)$



Delna urejenost inducirana/porojena s šibko urejenostjo:

Naj bo $(P, \leq)$ šibka urejenost.

Na P definiramo relacijo

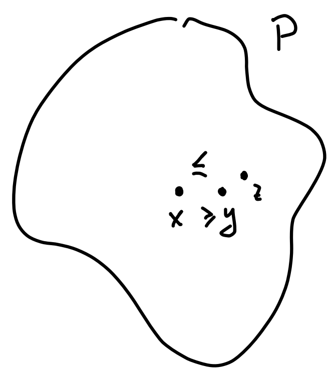
$$x \sim y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x$$

To je ekvivalenčna relacija na P.

Tvorimo kvocient $P/\sim$ in relacijo

$$[x]_\sim \precsim [y]_\sim :\Leftrightarrow x \leq y$$

Tedaj je $\precsim$ delna ureditev na $P/\sim$.



$$[x]_\sim \precsim [x]_\sim \Leftrightarrow x \leq x \quad \text{refl.}$$

<u>Primer</u>: Relacija $|$ na $\mathbb{Z}$

$$a \sim b \;:\Longleftrightarrow\; a \mid b \text{ in } b \mid a \;\Leftrightarrow\; |a| = |b|$$

$$\mathbb{Z}/_{\sim} = \{\{0\}, \{1,-1\}, \{2,-2\}, \ldots\}$$

Monotone preslikave

Delni urejenosti $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$

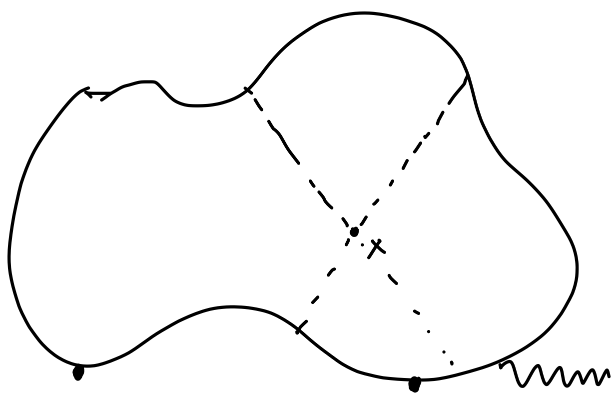
$f : P \to Q$ je <u>monotona</u> (<u>naraščajoča</u>), ko velja

$$\forall x, y \in P.\; x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y).$$

$f : P \to Q$ <u>antitona</u> (<u>padajoča</u>), ko velja

$$\forall x, y \in P.\; x \leq_P y \Rightarrow f(x) \geq_Q f(y).$$

Meje



Definicija: Naj bo (P, ≤) delna urejenost, S ⊆ P in x ∈ P:

- je spodnja meja podmnožice S, ko velja ∀ y ∈ S . x ≤ y
- x je zgornja meja podmnožice S, ko velja ∀ y ∈ S . y ≤ x
- x je infimum ali največja spodnja meja ali natančna spodnja meja podmnožice S, ko je spodnja meja S in velja: za vse y ∈ P, če je y spodnja meja S, potem je y ≤ x
- x je supremum ali najmanjša zgornja meja ali natančna zgornja meja podmnožice S, ko je zgornja meja S in velja: za vse y ∈ P, če je y zgornja meja S, potem je x ≤ y
- x je minimalni element podmnožice S, ko velja x ∈ S in ∀ y ∈ S . y ≤ x ⇒ x = y
- x je maksimalni element podmnožice S, ko velja x ∈ S in ∀ y ∈ S . x ≤ y ⇒ x = y
- x je najmanjši ali prvi element ali minimum podmnožice S, ko velja x ∈ S in ∀ y ∈ S . x ≤ y
- x je največji ali zadnji element ali maksimum podmnožice S, ko velja x ∈ S in ∀ y ∈ S . y ≤ x