Relacije urejenosti

Relacije urejenosti

Definicija: Relacija $R \subseteq A \times A$ je:

- **šibka urejenost**, ko je refleksivna in tranzitivna
- **delna urejenost**, ko je refleksiva, tranzitivna in antisimetrična
- **linearna urejenost**, ko je delna urejenost in je sovisna ($\forall\ x\ y \in A\ .\ x\ R\ y \lor y\ R\ x$)

Za relacije urejenosti ponavadi uporabljamo simbole, ki spominjajo na znak $\leq$, kot so $\preccurlyeq$, $\subseteq$, $\sqsubseteq$, …

Primeri urejenosti

1. Relacija deljivosti na naravnih številih je delna urejenost.
2. Relacija deljivosti na celih številih je šibka urejenost, ni pa delna urejenost.
3. Relacija $\leq$ na realnih številih je linearna urejenost.
4. Relacija $\subseteq$ na $P(A)$ je delna urejenost. Za katere množice A je linearna?
5. Relacija $=$ je delna urejenost.

Hassejev diagram

Končno delno ureditev $(A, \leq)$ lahko predstavimo s **Hassejevim diagramom:** elemente množice A narišemo tako, da je x pod y, kadar velja $x \leq y$. Nato povežemo vozlišči x in y, če je y neposredni naslednik x, se pravi, da velja $x \neq y$, $x \leq y$ in iz $x \leq z \leq y$ sledi $x = z \lor z = y$.

Primer: kakšen je Hassejev diagram relacije deljivosti na množici $\{0, 1, ..., 10\}$?

Primer: kakšen je Hassejev diagram relacije $\subseteq$ na množici $P(\{a,b,c\})$?

Operacije na urejenostih

Obratna urejenost

Če je $\leq$ delna urejenost na P potem je tudi transponirana relacija $\geq$, definirana z

$x \geq y \Leftrightarrow x \leq y$

delna urejenost na P. Če je $\leq$ linearna, je $\geq$ linearna.

Produktna in leksikografska urejenost

Naj bosta $(P, \leq)$ in $(Q, \sqsubseteq)$ delni urejenosti. Na kartezičnem produktu $P \times Q$ lahko definiramo dve urejenosti:

- **produktna** urejenost $\preccurlyeq$: $(x_1,y_1) \preccurlyeq (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \land y_1 \sqsubseteq y_2$
- **leksikografska** urejenost $\preccurlyeq$_lex: $(x_1,y_1) \preccurlyeq\_lex\ (x_2,y_2) \Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \land x_1 \leq x_2) \lor (x_1 = x_2 \land y_1 \sqsubseteq y_2)$

Primer: Kako si predstavljamo produktno in leksikografsko ureditev na $[0,1] \times [0,1]$, če $[0,1]$ uredimo z običajno relacijo $\leq$?

Izjava: Produktna in leksikografska urejenosti sta delni urejenosti. Leksikografska urejenost linearnih urejenosti je linearna.

Dokaz.

Dejstvo, da je produktna urejenost refleksivna, tranzitivna in antisimetrična, pustimo za vajo. Preverimo, da je leksikografska urejenost $\preccurlyeq$_lex delna urejenost.

Dokaz, da je $\preccurlyeq$_lex je refleksivna: za vsak $(x, y) \in P \times Q$ velja $x = x \land y \sqsubseteq y$, torej velja $(x, y) \sqsubseteq (x, y)$.

Dokazj=, da je $\preccurlyeq$_lex je antisimetrična: naj bosta $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P \times Q$ in denimo, da velja

$$(x_1, y_1) \preccurlyeq\_lex\ (x_2, y_2) \land (x_2, y_2) \preccurlyeq\_lex\ (x_1, y_1)$$

To je ekvivalentno

$$\begin{aligned}
&(x_1 \neq x_2 \land x_1 \leq x_2 \land x_2 \neq x_1 \land x_2 \leq x_1) \lor \\
&(x_1 \neq x_2 \land x_1 \leq x_2 \land x_2 = x_1 \land y_2 \sqsubseteq y_1) \lor \\
&(x_1 = x_2 \land y_1 \sqsubseteq y_2 \land x_2 \neq x_1 \land x_2 \leq x_1) \lor \\
&(x_1 = x_2 \land y_1 \sqsubseteq y_2 \land x_2 = x_1 \land y_2 \sqsubseteq y_1)
\end{aligned}$$

Če v zgornji formuli upoštevamo, da je $x_1 \neq x_2 \land x_1 = x_2$, vidimo, da sta drugi in tretji disjunkt ekvivalentna $\bot$, zato je izjava ekvivalentna:

$$\begin{aligned}
&(x_1 \neq x_2 \land x_1 \leq x_2 \land x_2 \neq x_1 \land x_2 \leq x_1) \lor \\
&(x_1 = x_2 \land y_1 \sqsubseteq y_2 \land x_2 = x_1 \land y_2 \sqsubseteq y_1)
\end{aligned}$$

A tudi prvi disjunkt je ekvivalenten $\bot$, ker iz $x_1 \leq x_2 \land x_2 \leq x_1$ sledi $x_1 = x_2$, saj je $\leq$ po predpostavki antisimetrična. Torej ostane samo zadnji disjunkt, ki je ekvivalenten

$$x_1 = x_2 \land y_1 \sqsubseteq y_2 \land y_2 \sqsubseteq y_1$$

Ker je $\sqsubseteq$ antisimetrična, sledi $x_1 = x_2$ in $y_1 = y_2$, kar smo želeli dokazati.

Dokaz, da je $\preccurlyeq$_lex tranzitivna: naj bodo $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in P \times Q$ in denimo, da velja

$$(x_1, y_1) \preccurlyeq\_lex\ (x_2, y_2) \land (x_2, y_2) \preccurlyeq\_lex\ (x_3, y_3)$$

To je ekvivalentno

$$\begin{aligned}
&(x_1 \neq x_2 \land x_1 \leq x_2 \land x_2 \neq x_3 \land x_2 \leq x_3) \lor \\
&(x_1 \neq x_2 \land x_1 \leq x_2 \land x_2 = x_3 \land y_2 \sqsubseteq y_3) \lor \\
&(x_1 = x_2 \land y_1 \sqsubseteq y_2 \land x_2 \neq x_3 \land x_2 \leq x_3) \lor \\
&(x_1 = x_2 \land y_1 \sqsubseteq y_2 \land x_2 = x_3 \land y_2 \sqsubseteq y_3)
\end{aligned}$$

Obravnavajmo štiri primere in v vsakem od njih dokažimo $(x_1, y_1) \preccurlyeq\_lex\ (x_3, y_3)$, se pravi $(x_1 \neq x_3 \land x_1 \leq x_3) \lor (x_1 = x_3 \land y_1 \sqsubseteq y_3)$:

1. Če velja $x_1 \neq x_2 \land x_1 \leq x_2 \land x_2 \neq x_3 \land x_2 \leq x_3$: ker je $\leq$ tranzitivna sledi $x_1 \leq x_3$, poleg tega pv velja $x_1 \neq x_3$: če bi veljalo $x_1 = x_3$, bi iz predpostavk dobili $x_3 \leq x_2 \land x_2 \leq x_3$, od koder bi sledilo $x_2 = x_3$, kar je v protislovju s predpostavko $x_2 \neq x_3$.

2. Če velja $x_1 \neq x_2 \land x_1 \leq x_2 \land x_2 = x_3 \land y_2 \sqsubseteq y_3$: ker je $x_2 = x_3$ iz prvih dveh predpostavk sledi $x_1 \neq x_3 \land x_1 \leq x_3$.

3. Če velja $x_1 = x_2 \land y_1 \sqsubseteq y_2 \land x_2 \neq x_3 \land x_2 \leq x_3$: ker je $x_1 = x_2$ iz zadnjih dveh predpostavk sledi $x_1 \neq x_3 \land x_1 \leq x_3$.

4. Če velja $x_1 = x_2 \wedge y_1 \sqsubseteq y_2 \wedge x_2 = x_3 \wedge y_2 \sqsubseteq y_3$: torej je $x_1 = x_3$ ker je = tranzitivna in $y_1 \sqsubseteq y_3$ ker je $\sqsubseteq$ tranzitivna.

Nazadnje preverimo še, da je ≼_lex linearna, če sta ≤ in ⊑ linearni. Naj bosta $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in P \times Q$. Dokazati želimo

$$(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2) \vee (x_2, y_2) \preccurlyeq (x_1, y_1)$$

To je ekvivalentno disjunkciji

$$(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \leq x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \sqsubseteq y_2) \vee (x_2 \neq x_1 \wedge x_2 \leq x_1) \vee (x_2 = x_1 \wedge y_2 \sqsubseteq y_1)$$

kar je ekvivalentno

$$(x_1 \neq x_2 \wedge (x_1 \leq x_2 \vee x_2 \leq x_1)) \vee (x_1 = x_2 \wedge (y_1 \sqsubseteq y_2 \vee y_2 \sqsubseteq y_1))$$

Ker sta ≤ in ⊑ linearni, je to ekvivalentno

$$(x_1 \neq x_2 \wedge \top) \vee (x_1 = x_2 \wedge \top)$$

Kar je ekvivalentno

$$(x_1 \neq x_2) \vee (x_1 = x_2)$$

To pa drži po zakonu o izključeni tretji možnosti. S tem je linearnost ≼_lex, dokazana. □

Vsota urejenosti

Naj bosta $(P, \leq)$ in $(Q, \sqsubseteq)$ delni urejenosti. Na vsoti $P + Q$ lahko definiramo urejenost ≼ s predpisom:

$$\begin{aligned} u \preccurlyeq v \Leftrightarrow\ & (\exists\, x, y \in P \,.\, u = in_1(x) \wedge v = in_1(y) \wedge x \leq y) \vee \\ & (\exists\, s, t \in Q \,.\, u = in_2(s) \wedge v = in_2(t) \wedge s \sqsubseteq t) \end{aligned}$$

Zaporedna vsota urejenosti

Naj bosta $(P, \leq)$ in $(Q, \sqsubseteq)$ delni urejenosti. Na vsoti $P + Q$ lahko definiramo urejenost ≼ s predpisom:

$$\begin{aligned} u \preccurlyeq v \Leftrightarrow\ & (\exists\, x, y \in P \,.\, u = in_1(x) \wedge v = in_1(y) \wedge x \leq y) \vee \\ & (\exists\, x \in P \,.\, \exists\, s \in Q \,.\, u = in_1(x) \wedge v = in_2(s)) \vee \\ & (\exists\, s, t \in Q \,.\, u = in_2(s) \wedge v = in_2(t) \wedge s \sqsubseteq t) \end{aligned}$$

Torej so vsi elementi P pred vsemi elementi Q.

Zaporedna vsota linearnih urejenosti je linearna.

Potenca urejenosti

Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost in A množica. Na eksponentni množici P^A lahko definiramo urejenost ≼ s predpisom:

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall\, x \in A \,.\, f(x) \leq g(x)$$

Naloga: ali je ≼ linearna, kadar je ≤ linearna?

Delna urejenost, inducirana s šibko ureditvijo

Naj bo $(P, \leq)$ šibka ureditev. Relacija $\sim$ na P, definirana s predpisom

$$x \sim y \Leftrightarrow x \leq y \land y \leq x$$

je ekvivalenčna relacija. Na kvocientu $P/\sim$ lahko definiramo relacijo $\preccurlyeq$ s predpisom

$$[x] \preccurlyeq [y] \Leftrightarrow x \leq y$$

Treba je preveriti, da je relacija dobro definirana, se pravi da velja

$$x \sim x' \land y \sim y' \Rightarrow (x \leq y \Leftrightarrow x' \leq y')$$

Pa preverimo: denimo, da velja $x, y, x', y' \in P$ in $x \sim x'$ in $y \sim y'$. Torej velja

$$x \leq x' \land x' \leq x \land y \leq y' \land y' \land x$$

Sedaj dokažimo $x \leq y \Leftrightarrow x' \leq y'$:

1. Denimo, da velja $x \leq y$. Tedaj dobimo $x' \leq x \leq y \leq y'$.
2. Denimo, da velja $x' \leq y'$. Tedaj dobimo $x \leq x' \leq y' \leq y$.

Torej je $\preccurlyeq$ dobro definirana.

Izjava: Relacija $\preccurlyeq$, ki je inducirana s šibko ureditvijo, je delna ureditev.

Dokaz. Refleksivnost in tranzitivnost $\preccurlyeq$ sledita iz refleksivnosti in tranzitivnosti $\leq$. Preverimo antisimetričnost: denimo, da velja $[x] \leq [y]$ in $[y] \leq [x]$. Tedaj velja $x \leq y$ in $y \leq x$, torej velja $x \sim y$ in `[x] = [y]. □

Primer: Obravnavajmo cela števila Z in deljivost $|$, ki je šibka ureditev. Za vse $k, m \in Z$ velja

$$k \sim m \Leftrightarrow k \mid m \land m \mid k \Leftrightarrow |k| = |m|$$

Torej je $Z/\sim \cong N$, kjer izomorfizem preslika $[k] \mapsto |k|$. Delna ureditev na $Z/\sim$ inducirana z deljivostjo je spet deljivost (ko jo prenesemo iz $Z/\sim$ na N s pomočjo izomorfizma).

Monotone preslikave

Definicija: Preslikava $f : P \to Q$ med delnima urejenostma $(P, \preccurlyeq)$ in $(Q, \sqsubseteq)$ je **monotona** (ali **naraščajoča**), ko velja $\forall x, y \in P . x \preccurlyeq y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Definicija: Preslikava $f : P \to Q$ med delnima urejenostma $(P, \preccurlyeq)$ in $(Q, \sqsubseteq)$ je **antitona** (ali **padajoča**), ko velja $\forall x, y \in P . x \preccurlyeq y \Rightarrow f(y) \sqsubseteq f(x)$.

Opozorilo: v analizi "monotona" pomeni "monotona ali antitona". To ni nič čudnega, ker "dan" tudi pomeni "dan in noč".

Izrek: Kompozicija monotonih preslikav je monotona. Identita je monotona.

Dokaz. Naj bosta $f : P \to Q$ in $g : Q \to R$ monotoni preslikavi med delnimi urejenostmi $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ in $(R, \leq_R)$. Če je $x \leq_P y$, potem je zaradi monotonisti f tudi $f(x) \leq_Q f(y)$, nato pa je zaradi monotonisti g spet $g(f(x)) \leq_R g(f(y))$. Identiteta je očitno monotona.

Primeri

- Konstantna preslikava je monotona.
- Seštvanje $+ : R \times R \to R$ je monotona operacija glede na produktno ureditev na $R \times R$.

- Množenje $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ni monotona operacija.

Meje

Definicija: Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost, $S \subseteq P$ in $x \in P$:

- x je **spodnja meja** podmnožice S, ko velja $\forall y \in S . x \leq y$
- x je **zgornja meja** podmnožice S, ko velja $\forall y \in S . y \leq x$
- x je **infimum** ali **največja spodnja meja** ali **natančna spodnja meja** podmnožice S, ko je spodnja meja S in velja: za vse $y \in P$, če je y spodnja meja S, potem je $y \leq x$
- x je **supremum** ali **najmanjša zgornja meja** ali **natančna zgornja meja** podmnožice S, ko je zgornja meja S in velja: za vse $y \in P$, če je y zgornja meja S, potem je $x \leq y$
- x je **minimalni element** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall y \in S . y \leq x \Rightarrow x = y$
- x je **maksimalni element** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall y \in S . x \leq y \Rightarrow x = y$
- x je **najmanjši** ali **prvi** element ali **minimum** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall y \in S . x \leq y$
- x je **največji** ali **zadnji** element ali **maksimum** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall y \in S . y \leq x$

Opozorilo: minimalni element ni isto kot minimum (in maksimalni element ni isto kot maksimum).

Kadar govorimo o "prvem elementu" ali "maksimalnem elementu" in ne povemo, na katero podmnožico se nanaša element, imamo običajno v mislih kar celotno delno ureditev.

Izrek: Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost in $S \subseteq P$. Tedaj ima S največ en infimum in največ en supremum, ki ju zapišemo $\inf S$ in $\sup S$, kadar obstajata.

Dokaz. Denimo, da sta x in y oba infimum S. Ker je y spodnja meja za S in x njen infimum, velja $y \leq x$. Podobno velja $x \leq y$, torej $x = y$. Za supremum je dokaz podoben. □

Primer: Supremum končne neprazne množice $S \subseteq \mathbb{N}$ za relacijo deljivosti $|$ je namanjši skupni večkratnik elementov iz S. Infimum je navečji skupni delitelj. Kaj pa, če je S prazna ali neskončna?

Mreže

Definicija: Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost:

1. $(P, \leq)$ je **mreža**, ko imata vsaka dva elementa $x, y \in P$ infimum in supremum.
2. $(P, \leq)$ je **omejena mreža**, ko ima vsaka končna podmnožica P infimum in supremum.
3. $(P, \leq)$ je **polna mreža**, ko ima vsaka podmnožica P infimum in supremum.

Infimum in supremum elementov x in y pišemo $x \wedge y$ in $x \vee y$.

Izrek: Delna urejenost $(P, \leq)$ je omejena mreža natanko tedaj, ko ima najmanši in največji element, ter imata vsaka sva elementa infimum in supremum.

Dokaz.

Denimo, da je $(P, \leq)$ omejana mreža. Tedaj P ima najmanši element, namreč $\sup \emptyset$, in največji element, namreč $\inf \emptyset$. Infimum in supremum x in y sta seveda $\inf \{x, y\}$ in $\sup \{x, y\}$.

Denimo, da ima P najmanši element $\bot_P$ in največji element $\top_P$, vsaka dva elementa pa imata infimum in supremum. Naj bo $S \subseteq P$ končna množica:

- če je $S = \emptyset$, potem je $\inf S = \top_P$ in $\sup S = \bot_P$
- če je $S = \{x_1, \dots x_n\}$ za $n > 0$, potem je $\inf S = (\inf \{x_1, \dots, x_{n-1}\}) \vee x_n$ in $\sup S = (\sup \{x_1, \dots, x_{n-1}\}) \vee x_n$ □

Primeri

- množica $2 = \{\bot, \top\}$ je omejena mreža za relacijo $\Rightarrow$
- relacija deljivosti na množici N je polna mreža
- relacija deljivosti na množici pozitivnih naravnih števil je mreža
- potenčna množica $P(A)$, urejena z $\subseteq$, je polna mreža
- zaprti interval $[a,b]$, urejen z $\leq$, je polna mreža
- relna števila R, urejena z $\leq$, so mreža