Ekvivalenčne relacije

Def: Relacija $R \subseteq A \times A$ je ekvivalenčna, če je:

- refleksivna
- simetrična
- tranzitivna

Kadar velja xRy, pravimo, da sta x in y ekvivalentna.

Za ekv. rel. uporabljamo simbole: $\equiv, \approx, \sim, \simeq$

Primeri:

- vzporednost premic ✓
- pravokotnost X
- univerzalna rel. na A: $A \times A \subseteq A \times A$ ✓
- diagonala (ali enakost) ✓

Ekvivalenčna relacija, porojena s preslikavo:

Naj bo $f: A \to B$.

Definiramo relacijo $\sim_f$ na A:

$$x \sim_f y \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

$\sim_f$ je ekvivalenčna:

- refleksivnost:

  $x \sim_f x \Leftrightarrow f(x) = f(x)$ je res

- simetričnost

  $x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x) \Leftrightarrow y \sim_f x$

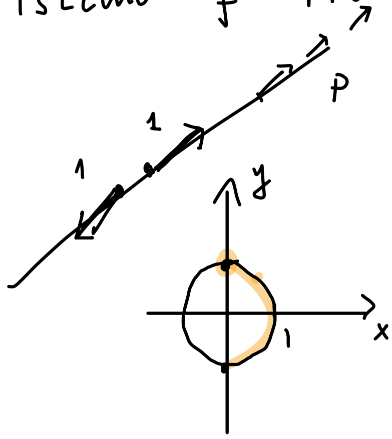
- tranzitivnost: premisli

Primer: relacija vzporednosti premic v ravnini

$p \parallel q$ "p in q vzporedni"

Ali je $\parallel$ porojena s kako preslikavo?

Iščemo $f : \text{Premice} \to \,?$, da $p \parallel q \Leftrightarrow f(p) = f(q)$.



$f : p \mapsto$ enotski smerni vektor, ki ima absciso pozitivno ali ordinato 1.

Ekvivalenčni razredi & kvocientne množice

Def: Naj bo $E \subseteq A \times A$ ekvivalenčna relacija na A.

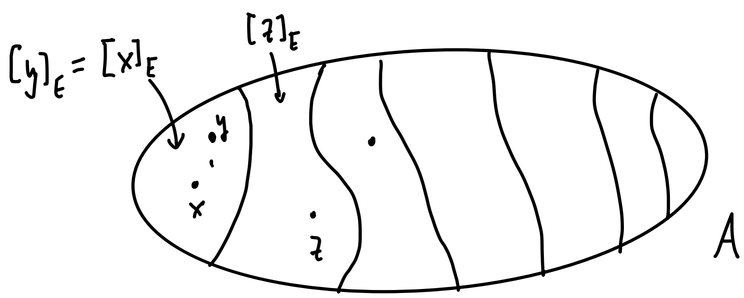
Ekvivalenčni razred $x \in A$ je množica

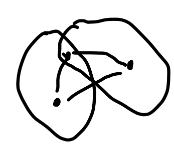
$$[x]_E := \{ y \in A \mid x E y \} \subseteq A$$

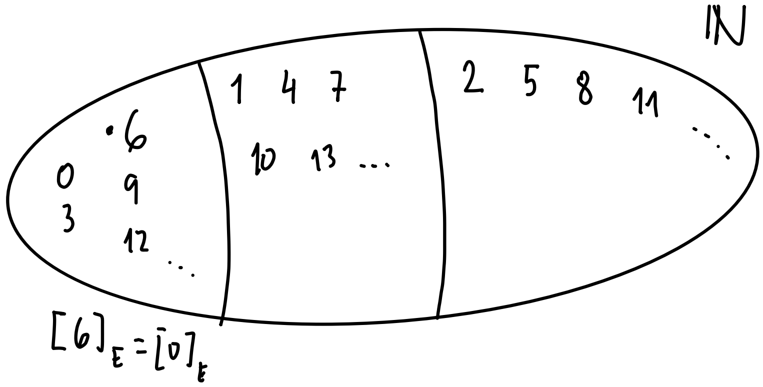
Kvocientna množica

$$A/_E := \{ [x]_E \mid x \in A \} = \{ \xi \in \mathcal{P}(A) \mid \exists x \in A .\ \xi = [x]_E \} \subseteq \mathcal{P}(A)$$

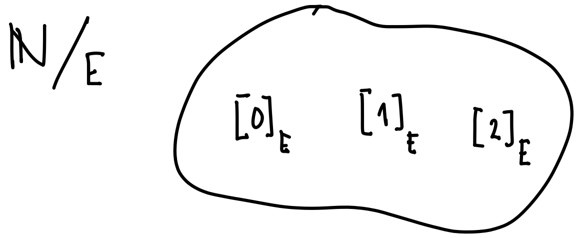
Velja: $x E y \Leftrightarrow [x]_E = [y]_E$







$k E m \Leftrightarrow 3 \mid (k-m)$



ima tri elemente

<u>Kanonična kvocientna preslikava</u>

$$q_E : A \longrightarrow A/E$$
$$x \longmapsto [x]_E$$

<u>Izrek</u>: Vsaka ekvivalenčna relacija je porojena z neko preslikavo.

Dokaz: $E \subseteq A \times A$ je porojena s q_E:

$$x E y \Leftrightarrow [x]_E = [y]_E \Leftrightarrow q_E(x) = q_E(y) \quad \blacksquare$$

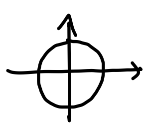
<u>Razdelitev ali particija množice:</u>

<u>Razdelitev</u> A je množica $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, da velja:

1) $\forall B \in S \,.\, B \neq \emptyset$ elementi S so neprazni
2) $\forall B, C \in S \,.\, B = C \vee B \cap C = \emptyset$
3) $\bigcup S = A$

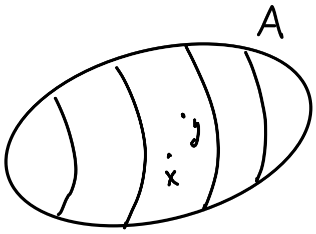
Primer: Razdelitev ravnine : navpične premice

: koncentrične krožnice s središčem $(0,0)$ in $\{(0,0)\}$



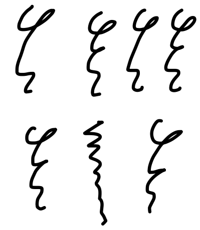
Vsaka ekv. relacija $E \subseteq A \times A$ nam da razdelitev A na ekv. razrede.

In obratno: če je $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ razdelitev A, tedaj določa ekvivalenčno relacijo $\approx_S$



$$x \approx_S y :\Leftrightarrow \exists B \in S,\ x \in B \wedge y \in B$$

$$A/{\approx_S} = S.$$



Vprašanje: zakaj se reče "ekvivalenčni razred"?

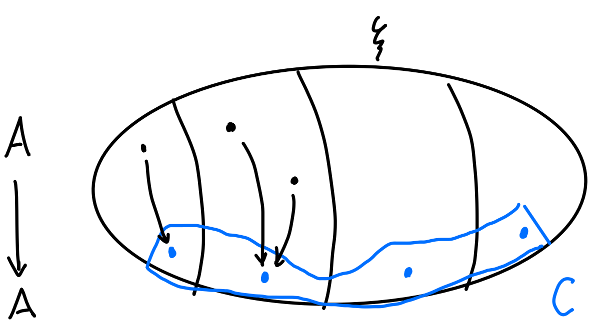
Def: Izbor predstavnikov za ekv. rel. $E \subseteq A \times A$ je taka množica $C \subseteq A$, ki vsak ekvivalenčni razred seka natanko enkrat:

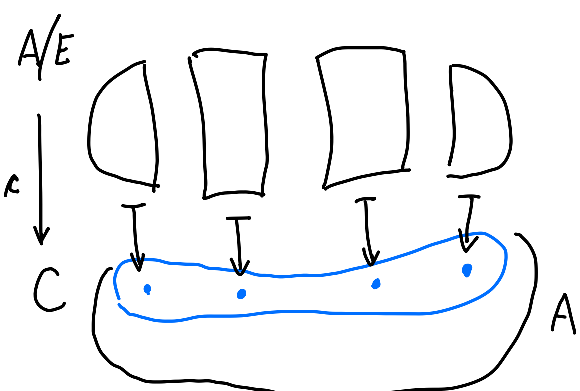
$$\forall \xi \in A/E.\ \exists! x \in A.\ x \in \xi \cap C$$

Primer: $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $m\,E\,n :\Leftrightarrow 3 \mid (m-n)$

$C = \{0, 1, 2\}$ ✓ ... $c(28) = 1$

$C' = \{1000, 1001, 1002\}$ ✓ $c'(28) = 1000$





Izbor predstavnikov določa preslikavo $c : A/E \to C$,

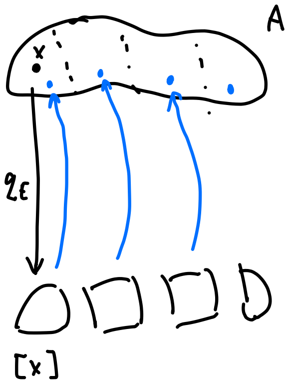
$c : \xi \mapsto$ tisti $x \in C$, za katerega je $x \in \xi$.

Velja: $q_E(c(\xi)) = \xi$ oz. $q_E \circ c = \mathrm{id}_{A/E}$

Popravimo:

(kodomeno c smo povečali iz C na A)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "q_E"'] \\ A/E \arrow[u, bend right, "c"'] \end{tikzcd}$$



Sklep: Če imamo izbor predstavnikov C, potem ta določa prerez $c: A/E \to A$ kvocientne $q_E : A \to A/E$.

Ali ima ekvivalenčna relacija izbor predstavnikov?

Primer: $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad x E y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$[0]_E = \mathbb{Q}$

$[\sqrt{2}]_E = \{\sqrt{2} + q \in \mathbb{R} \mid q \in \mathbb{Q}\}$

$[\pi^e]_E = [0]_E$? $\quad \pi^e \in \mathbb{Q}$?

Izrek: Naslednje izjave so ekvivalentne:

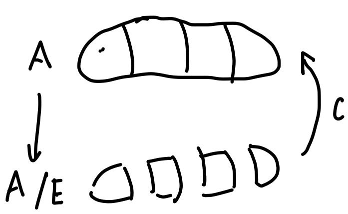
(1) Vsaka surjektivna preslikava ima desni inverz (prerez)

(2) Vsaka ekvivalenčna relacija ima izbor predstavnikov

(3) Vsaka družina nepraznih množic ima funkcijo izbire

(4) Produkt družine nepraznih množic je neprazen.

(1) $\Rightarrow$ (2)



q_E surjektivna, torej po (1) ima prerez

$q_E \circ c = \mathrm{id}_{A/E}$ $\quad c$ nam da izbor predstavnikov

$(3 \Rightarrow 4)$ očitno

$A : I \to \mathrm{Set}$ $\qquad \prod_{i \in I} A_i :=$ množic funkcij izbire za A

Aksiom izbire: Vsaka družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.

Univerzalna lastnost kvocientne množice:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

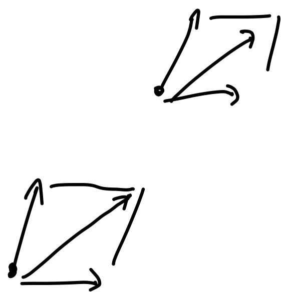
$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{6}$$

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad ?$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "q_E"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A/E \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

f bi radi podali tako, da podamo g.

Kakšnemu pogoju mora zadoščati g



g mora biti skladen z E:

$$xEy \Rightarrow g(x) = g(y)$$

Potem dobimo
$$\begin{array}{ccc} f([x]_E) & := & g(x) \\ \parallel & & \parallel\ ? \\ f([y]_E) & := & g(y) \end{array}$$

Izrek: $E \subseteq A \times A$ ekvivalenčna
$g : A \to B$

Denimo, da je g skladna z E: $\forall x, y \in A .\ x E y \Rightarrow g(x) = g(y)$

Tedaj obstaja natanko ena $f : A/_E \to B$, da velja $f \circ q_E = g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "g"] \arrow[d, "q_E"'] & \\ A/_E \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

komutira, oz. $f([x]_E) = g(x)$ za vse $x \in A$

Dokaz:

Najprej dokažimo enoličnost: Recimo, da imamo $f_1, f_2 : A/_E \to B$ in $f_1 \circ q_E = g$, $f_2 \circ q_E = g$.

Dokažimo $f_1 = f_2$:

Vemo $f_1 \circ q_E = g = f_2 \circ q_E$

$f_1 \circ q_E = f_2 \circ q_E$ ker je q_E surjektivna, je epi lahko krajšamo

$\Rightarrow f_1 = f_2$

Dokažimo obstoj: podamo $f : A/_E \to B$ s funkcijsko relacijo $\varphi \subseteq A/_E \times B$

$$\cancel{\varphi([x]_E, b) :\Longleftrightarrow g(x) = b}$$

$$\varphi(\xi, b) :\Longleftrightarrow \exists x \in \xi .\ g(x) = b$$

"ξ vsebuje element, ki ga g slika v b"

Preverimo, da je φ funkcijska relacija:

1. enoličnost: dokažimo

$\varphi(\xi, b_1) \wedge \varphi(\xi, b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$

Predpostavimo

$\exists x_1 \in \xi .\ g(x_1) = b_1$

$\exists x_2 \in \xi .\ g(x_2) = b_2$

Torej imamo $x_1, x_2 \in \xi$, da je $g(x_1) = b_1$ in $g(x_2) = b_2$.

$\Downarrow$

$$x_1 E x_2 \overset{g \text{ skladna } E}{\Longrightarrow} \underset{b_1}{\overset{\parallel}{g(x_1)}} = \underset{b_2}{\overset{\parallel}{g(x_2)}} \Rightarrow b_1 = b_2$$

2. Celovitost: dokažimo

$$\forall \xi \in A/_E .\ \exists b \in B .\ \exists x \in \xi .\ g(x) = b .$$

Naj bo $\xi \in A/E$.
Ker je $\xi \neq \emptyset$, obstaja $y \in \xi$.
Podamo $b := g(y)$ in $x := y$. Preverimo: $g(y) = g(y)$ ✓

Zdaj imamo $f : A/E \to B$, velja: za vse $\xi \in A/E$ in $b \in B$

$$f(\xi) = b \iff \varphi(\xi, b) \iff \exists x \in \xi .\ g(x) = b .$$

Preverimo, da za $z \in A$ velja

$$f([z]_E) = g(z)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists x \in [z]_E .\ g(x) = g(z)$$

to drži: podamo $x := z$.
Preverimo $z \in [z]_E$ ✓
$g(z) = g(z)$ ✓ ■

Kanonična razčlenitev preslikave

$$f : A \longrightarrow B \qquad f_*(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$
$$= \{ y \in B \mid \exists x \in A .\ f(x) = y \} \subseteq B$$

f porodi $\sim_f$ na A: $\quad x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "q_E"', "\text{surjektivna}"] & & & B \\
& A/\sim_f \arrow[r, "b"', "\text{bijektivna}"] & f_*(A) \arrow[ur, "i"', "\text{injektivna}"] &
\end{tikzcd}$$

$i(x) = x$

$$b([x]_{\sim_f}) = f(x) \quad \in f_*(A)$$

Preverimo, da je b dobro definirana: $x \sim_f y \Rightarrow f(x) = f(y)$? ✓

$$\Updownarrow$$
$$f(x) = f(y)$$

- b je injektivna:

$$b([x]) = b([y]) \iff$$
$$f(x) = f(y) \iff$$
$$x \sim_f y \iff [x] = [y]$$

- b surjektivna: Naj bo $y \in f_*(A)$.
  Iščemo $\xi \in A/\sim_f$, da je $b(\xi) = y$.

  Vemo: $y \in f_*(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \,.\, y = f(x)$.

  Torej imamo $x \in A$, da je $\underbrace{y = f(x)}_{(1)}$.

  Podamo $\xi := [x]$.

  Preverimo
$$\begin{aligned} b(\xi) &= y \\ b([x]) &= y \\ \| \\ f(x) \end{aligned}$$
zaradi (1).

Diagram komutira:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "q_E"'] & & & B \\ & A/\sim_f \arrow[r, "b"'] & f_*(A) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Surjektivna, bijektivna, injektivna

$i(x) = x$

$b([x]_{\sim_f}) = f(x) \in f_*(A)$

$$\begin{aligned} &i(b(q_E(x))) = \\ &b(q_E(x)) = \\ &b([x]) = \\ &f(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Sklep: Vsako preslikavo $f : A \to B$ lahko faktoriziramo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

kjer je q surjektivna in i injektivna.

Dokaz:

Podamo $C := f_*(A)$

$$q : A \longrightarrow f_*(A) \qquad\qquad i : f_*(A) \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x) \qquad\qquad\qquad x \longmapsto x$$

Ali je faktorizacija enolična?

$$\begin{tikzcd} & C_2 \arrow[dr, "i_2"] & \\ A \arrow[ur, "q_2"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_1"'] & & B \\ & C_1 \arrow[ur, "i_1"'] & \end{tikzcd}$$

Enolična do enoličnega izomorfizma natančno.

To pomeni: če imamo

$$\begin{tikzcd} & C_2 \arrow[dr, tail, "i_2"] & \\ A \arrow[ur, two heads, "g_2"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "g_1"'] & & B \\ & C_1 \arrow[ur, tail, "i_1"'] & \end{tikzcd}$$

$f = i_2 \circ g_2$

$f = i_1 \circ g_1$

Tedaj obstaja natanko en izomorfizem $c : C_1 \to C_2$, da komutira

$$\begin{tikzcd} & C_2 \arrow[dr, tail, "i_2"] & \\ A \arrow[ur, two heads, "g_2"] \arrow[dr, two heads, "g_1"'] & & B \\ & C_1 \arrow[uu, "c"] \arrow[ur, tail, "i_1"'] & \end{tikzcd}$$

$g_2 = c \circ g_1$

$i_1 = i_2 \circ c$

$i_2(c(x)) = i_1(x)$

$c(x) = i_2^{-1}(i_1(x))$