Relacije

Predikati

Predikat na množici A opredeljuje kako lastnost elementov množice A. Če je P predikat na A in $x \in A$, potem se je smiselno vprašati, ali x zadošča predikatu P. Odgovor je resničnostna vrednost, ki jo označimo s $P(x)$.

Primer: Na množici naravnih števil N lahko obravnavamo predikat "je sodo število". Tako na primer 4 zadošča predikatu "je sodo število", 7 pa mu zadošča.

Predikat P na množici A lahko predstavimo na dva načina:

- kot preslikavo $P : A \to 2$, ki slika $x \in A$ v resničnostno vrednost $P(x)$,
- kot podmnožico $P \subseteq A$ tistih $x \in A$, za katere velja $P(x)$.

Oba načina predstavitve sta uporabna, spoznali pa smo že izomorfizem med njima, saj velja $P(A) \cong 2^A$.

Relacije

Relacije s večmestni predikati. Se pravi, relacija R opredeljujejo kako lastnost urejenih večteric kartezičnega produkta $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Pravimo, da je R **n-člena** ali **n-mestna relacija** na množicah $A_1, \ldots, A_n$.

Primer: Na množici točk v ravnini lahko obravnavamo relacijo kolinearnosti. To je trimestna relacija: točke A, B in C so kolinearne, kadar obstaja premica, ki vsebuje vse tri točke.

Relacijo R na množicah $A_1, \ldots, A_n$ lahko predstavimo na dva načina, podobno kot predikate:

- kot preslikavo $R : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to 2$
- kot podmnožico $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

Bolj običajna je predstavitev s podmnožicami, zato bomo dejstvo, da je R relacija na množicah $A_1, \ldots, A_n$ zapisali kar kot $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Za elemente $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$ dejstvo, da so v relaciji R zapišemo $R(x_1, \ldots, x_n)$, včasih pa tudi $(x_1, \ldots, x_n) \in R$.

Na množicah $A_1, \ldots, A_n$ lahko vedno definiramo:

- **prazno relacijo $\emptyset$**: nobeni elementi niso v prazni relaciji
- **univerzalno relacijo $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$**: vsi elementi so v univerzalni relaciji

Univerzalna relacija se imenuje tudi **polna relacija**.

V praksi so najbolj pogoste **dvomestna relacije**, se pravi relacije na dveh množicah, $R \subseteq A \times B$. V tem primeru pravimo množici A **domena** in B **kodomena** relacije R.

Pomembna relacija na množici A je **enakost** ali **diagonala** na A:

$$\Delta_A := \{ (x, y) \in A \times A \mid x = y \}$$

Zakaj ji pravimo diagonala?

Izmed dvočelnih relacij so najbolj pogoste relacije, pri katerih se domena in kodomena ujemata, torej $R \subseteq$

$A \times A$. V tem primeru pravimo, da je R **relacija na množici A**.

Denimo, da je $R \subseteq A \times B$ relacija, $x \in A$ in $y \in B$. Dejstvo, da sta x in y v relaciji R zapišemo na enega od načinov

1. $(x, y) \in R$
2. $R(x, y)$
3. $x \; R \; y$

Prvi zapis se uporablja, kadar je R podana kot podmnožica $A \times B$, drugi kadar podamo R z logično formulo. Tretji način je tudi pogost, še posebej kadar je relacija označena s simbolom kot je $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\sqsubseteq$, $\sim$ ipd.

Relacijo lahko opišemo na več načinov:

- s formulo
- z resničnostno tabelo
- z usmerjenim grafom

Predstavitev relacije $R \subseteq A \times A$ z usmerjenim grafom: za vozlišča grafa vzamemo elemente množice A, nato pa narišemo puščico od x do y, kadar velja $x \; R \; y$.

Osnovne lastnosti relacij

Relacije, ki so pomembne v matematični praksi imajo pogosto lastnosti, ki jih poimenujemo.

Za relacijo $R \subseteq A \times A$ pravimo da je:

- **refleksivna:** $\forall x \in A \,.\, x \; R \; x$
- **simetrična:** $\forall x, y \in A \,.\, x \; R \; y \Rightarrow y \; R \; x$
- **antisimetrična:** $\forall x, y \in A \,.\, x \; R \; y \land y \; R \; x \Rightarrow x = y$
- **tranzitivna:** $\forall x, y, z \in A \,.\, x \; R \; y \land y \; R \; z \Rightarrow x \; R \; z$
- **irefleksivna:** $\forall x \in A \,.\, \neg (x \; R \; x)$
- **asimetrična:** $\forall x \; y \in A \,.\, x \; R \; y \Rightarrow \neg (y \; R \; x)$
- **sovisna:** $\forall x \; y \in A \,.\, x \neq y \Rightarrow x \; R \; y \lor y \; R \; x$
- **strogo sovisna:** $\forall x \; y \in A \,.\, x \; R \; y \lor y \; R \; x$

Vprašanje: kako iz usmerjenga grafa relacije razberemo refleksivnost in simetričnost? Kaj pa ostale lastnosti?

Operacije na relacijah

Unija, presek in komplement relacij

Ker so relacije pravzaprav podmnožice, lahko na njih uporabljamo operacije unija $\cap$, presek $\cup$ in komplement $\square^c$. Denimo, da sta $R, S \subseteq A \times B$ relaciji. Tedaj velja:

- $x \; (R \cup S) \; y \Leftrightarrow x \; R \; y \lor x \; S \; y$
- $x \; (R \cap S) \; y \Leftrightarrow x \; R \; y \land x \; S \; y$
- $x \; (R^c) \; y \Leftrightarrow \neg (x \; R \; y)$

Primeri:

- komplement relacije enakosti = je relacija neenakosti $\neq$
- unija relacij < in > na realnih številih je relacija $\neq$
- presek relacij $\leq$ in $\geq$ na realnih številih je relacija =

Transponirana relacija

Dvojiške relacije lahko tudi **transponiramo**. Transponiranka relacije $R \subseteq A \times B$ je relacija $R^\top \subseteq B \times A$, definirana s predpisom

$$y \; R^\top \; x \Leftrightarrow x \; R \; y$$

ali ekvivalentno

$$R^\top := \{ (y, x) \in B \times A \mid x \; R \; y \}$$

Očitno velja $(R^\top)^\top = R$, torej je transponiranje *involucija*.

Primera:

- transpozicija relacije < na realnih številih $\mathbb{R}$ je relacija > na $\mathbb{R}$,
- komplement relacije < na $\mathbb{R}$ je relacija $\geq$ na $\mathbb{R}$.

Kompozitum relacij

Nadalje definiramo **kompozitum** relacij $R \subseteq A \times B$ in $S \subseteq B \times C$ kot relacijo $S \circ R \subseteq A \times C$, s predpisom

$$x \; (S \circ R) \; z \Leftrightarrow \exists \, y \in B \,.\, x \; R \; y \land y \; S \; z$$

ali ekvivalentno

$$S \circ R := \{ (x, z) \in A \times C \mid \exists \in B \,.\, (x,y) \in R \land (y,z) \in S \}$$

Se pravi, da sta $x \in A$ in $z \in C$ v relaciji $S \circ R$, če sta preko S in R povezana s kakim elementom $y \in B$.

Primer:

- kompozitum relacij “x je otrok od y” in “z je mati od y” je relacija “z je babica od x”.

Izrek:

1. Kompozitum relacij je asociativen: $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$
2. Diagonala je enota za kompozicijo relacij: $\Delta\_B \circ R = R = R \circ \Delta\_A$

Naloga: Zgornji izrek zapiši bolj natančno, da bo razvidno, kaj so domene in kodomene relacij.

Dokaz.

Asociativnost kompozicije: Naj bo $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ in $T \subseteq C \times D$ ter $a \in A$ in $d \in D$. Tedaj velja

```
a (T ∘ (S ∘ R)) d                         ⇔
∃ c ∈ C . a (S ∘ R) c ∧ c T d             ⇔
∃ c ∈ C . (∃ b ∈ B . a R b ∧ b R c) ∧ c T d  (1)
```

in

```
a ((T ∘ S) ∘ R) d                         ⇔
```

$$\exists\, b \in B .\ a \mathrel{R} b \land b \mathrel{(T \circ S)} d \quad \Leftrightarrow$$
$$\exists\, b \in B .\ a \mathrel{R} b \land (\exists\, c \in C .\ b \mathrel{S} c \land c \mathrel{T} d) \quad (2)$$

Torej je treba dokazati ekvivalenco izjav, ki sledi iz *Frobeniuseva pravila* (kjer je p formula, v kateri x ne nastopa kot prosta spremenljivka):

$$(\exists\, x \in X .\ p \land q(x)) \Leftrightarrow p \land \exists\, x \in X .\ q(x)$$

Dokaz ekvivalence prepuščamo za vajo (najlažje je narediti verigo ekvivalenc med obema izjavama).

Diagonala je enota za kompozicijo: naj bo $R \subseteq A \times B$ ter $x \in A$ in $y \in B$. Tedaj velja

$$x \mathrel{(\Delta_B \circ R)} y \quad \Leftrightarrow$$
$$\exists\, z \in B .\ x \mathrel{R} y \land y \mathrel{\Delta_B} z \quad \Leftrightarrow$$
$$\exists\, z \in B .\ x \mathrel{R} y \land y = z \quad \Leftrightarrow$$
$$x \mathrel{R} y$$

V zadnjem koraku smo uporabili ekvivalenco $(\exists\, u \in U .\ u = v \land P(v)) \Leftrightarrow P(v)$. Podobno dokažemo, da je diagonala desna enota. □

Kompozitum relacij ima torej podobne lastnosti kot kompozitum funkcij.

Za $n \in N$ definiramo **n-to potenco** relacije $R \subseteq A \times A$ kot relacijo $R^n \subseteq A \times A$ takole:

$$x \mathrel{R^n} y \Leftrightarrow \exists\, z_0, \ldots, z_n \in A .\ z_0 = x \land z_n = y \land \forall\, i \in \{0, \ldots, n-1\} .\ z_i \mathrel{R} z_{i+1}$$

To je precej nečitljiva formula. Bolj razumljiva definicija je potenca kot n-kratni kompozitum relacije R same s sabo:

$$R^n := R \circ \cdots \circ R$$

kjer se desni R ponovi n-krat. Kaj dobimo, ko za n vstavimo 0? Enoto za kompozitum:

$$R^0 = \Delta_A$$

Funkcijske relacije

Funkcijo $f : A \to B$ smo definirali kot *prirejanje* med elementi A in B. A kaj pravzaprav je "prierjanje"? Je to funkcijski predpis, program, kaj drugega? Sedaj lahko povemo natančno: prirejanje, s katerim je podana funkcija, je *relacija* med elementi domene in kodomene.

Definicija: Naj bo $f : A \to B$ funkcija. **Graf** funkcije f je relacija $\Gamma_f \subseteq A \times B$, definirana s predpisom

$$x \mathrel{\Gamma_f} y \Leftrightarrow f(x) = y$$

ali ekvivalentno

$$\Gamma_f := \{ (x, y) \in A \times B \mid f(x) = y \}$$

Skratka, graf funkcije ni nič drugega kot njeno prirejanje.

Sedaj pa se vprašajmo: kakšnim pogojem mora zadoščati relacija $R \subseteq A \times B$, da je prirejanje za neko funkcijo? Odgovor poznamo: biti mora enolična in celovita.

Definicija: Relacija $R \subseteq A \times B$ je **funkcijska relacija**, če je

1. **celovita:** $\forall\, x \in A .\ \exists\, y \in B .\ x \mathrel{R} y$
2. **enolična:** $\forall\, x \in A .\ \forall\, y_1, y_2 \in B .\ x \mathrel{R} y_1 \land x \mathrel{R} y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

Ekvivalentno oba pogoja skupaj zapišemo: `∀ x ∈ A . ∃! y ∈ B . x R y`.

Graf `Γ_f ⊆ A × B` funkcije `f : A → B` je vedno funkcijska relacija.

Funkcijska relacija `R ⊆ A × B` določa preslikavo `φ_R : A → B` definirano s predpisom

```
φ_R : x ↦ (ι y ∈ B . x R y)
```

Če vzamemo funkcijo `f` in tvorimo njen graf `Γ_f` nato pa iz njega funckijo `φ_(Γ_f)` dobimo nazaj prvotno funkcijo `f`. Obratno, če je `R` funkcijska relacija, tedeaj je `Γ_(φ_R)` enaka `R`. Torej imamo izomorfizem

```
Bᴬ ≅ { R ⊆ A × B | ∀ x ∈ A . ∃! y ∈ B . x R y }
```

Izjava: Kompozitum funkcij se ujema s kompozitumom relacij:

```
Γ_(g ∘ f) = Γ_g ∘ Γ_f
```

Dokaz prepustimo za vajo, še prej pa morate izjavo zapisati bolj natančno: od kod in kam slikata preslikavi `f` in `g`, kaj pomeni kompozitum na levi in kaj na desni?

Ovojnice relacij

Pogosto imamo opravka z relacijo `R`, ki nima želene lastnosti (na primer ni tranzitivna) mi pa želimo relacijo, ki to lastnost ima. Ali lahko `R` kako spremenimo, da bo imela željeno lastnost? Če to lahko naredimo na več načinov, ali se eden od njih odlikuje?

Naj bo `R ⊆ A × A` relacija. Tedaj pravimo, da je relacija `T ⊆ A × A` **tranzitivna ovojnica** relacije `R`, če velja:

1. `T` je tranzitivna
2. `R ⊆ T`
3. če je `S ⊆ A × A` tranzitivna in velja `R ⊆ S`, tedaj je `T ⊆ S`.

Povedano drugače: tranzitivna ovojnica relacije `R` je najmanjša tranzitivna relacija, ki vsebuje `R`. Zaenkrat ne vemo, ali ima vsaka relacija tranzitivno ovojnico.

Izraz “ovojnica” uporabljamo, ker si lahko mislimo, da smo relacijo “ovili” tranzitivno relacijo tako, da se ji slednja čim bolj prilega. Namesto “ovojnica” rečemo tudi **ogrinjača** ali **zaprtje**.

Poleg tranzitivne ovojnice lahko definiramo tudi druge ovojnice:

- **refleksivna ovojnica** relacije `R ⊆ A × A` je najmanjša refleksivna relacija, ki vsebuje `R`
- **simetrična ovojnica** relacije `R ⊆ A × A` je najmanjša simetrična relacija, ki vsebuje `R`
- **refleksivna tranzitivna ovojnica** relacije `R ⊆ A × A` je najmanjša refleksivna in tranzitivna relacija, ki vsebuje `R`

Ali take ovojnice sploh obstajajo? Obravnavajmo le tranzitivne ovojnice, saj so ostali dokazi zelo podobni. Ključno pri dokazu obstoja tranzitivne ovojnice je naslednje dejstvo.

Lema: Naj bo `A` množica in `R : I → P(A × A)` družina relacij na `A`. Če za vsak `i ∈ I` velja, da je R_i tranzitivna relacija, potem je tudi presek `∩ R` tranzitivna relacija.

Dokaz. Iz definicije preseka družine množic (relacije so le posebne množice) sledi

```
x (∩ R) y ⇔ ∀ i ∈ I . x Rᵢ y
```

Dokažimo, da je $\cap R$ tranzitivna. Naj bodo $x, y, z \in A$ in denimo, da velja $x\ (\cap R)\ y$ in $y\ (\cap R)\ z$, kar je ekvivalentno

$$\forall i \in I .\ x R_i y \qquad (1)$$

in

$$\forall j \in I .\ y R_j z \qquad (2)$$

Dokazati moramo $x\ (\cap R)\ z$, kar je ekvivalentno

$$\forall k \in I .\ x R_k z$$

Naj bo torej $k \in I$, dokazujemo $x R_k z$. Uporabimo (1) pri $i = k$ in dobimo

$$x R_k y$$

Uporabimo (2) pri $j = k$ in dobimo

$$y R_k z$$

Po predpostavki je R_k tranzitivna relacija, torej velja $x R_k z$. □

Izrek: Vsaka relacija $R \subseteq A \times A$ ima enolično tranzitivno ovojnico.

Dokaz. Najprej premislimo, da ima R največ eno tranzitivno ovojnico: če sta S in T obe tranzitvni ovojnici R, potem iz definicije tranzitivne ovojnice sledi $S \subseteq T$ in $T \subseteq S$, torej velja $S = T$.

Sedaj pokažimo, da R ima tranzitivno ovojnico. Naj bo $R \subseteq A \times A$. Definirajmo množico relacij

$$D := \{ S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S \text{ in } S \text{ je tranzitivna} \}$$

Trdimo, da je $\cap D$ tranzitivna ovojnica relacije R:

1. Iz prejšnje leme sledi, da je $\cap D$ tranzitivna.
2. Ker velja $R \subseteq S$ za vsak $S \in D$, seveda sledi $R \subseteq \cap D$.
3. Denimo, da je $R \subseteq T$ in $T \subseteq A \times A$ tranzitivna relacija. Tedaj velja $T \in D$, torej je $T \subseteq \cap D$. □

Po istem kopitu pokažemo, da ima vsaka relacija $R \subseteq A \times A$ tudi ostale ovojnice. Je pa zgornji izrek neroden, ker nam dokaz ne poda uporabnega opisa tranzitivne ovojnice. Povejmo, kako lahko razne ovojnice opišemo bolj eksplicitno:

1. Refleksivna ovojnica relacije R je relacija $R \cup \Delta_A$, se pravi, da relaciji R dodamo še diagonalo.
2. Simetrična ovojnica relacije R je relacija $R \cup R^T$
3. Tranzitivna ovojnica relacije R je relacija $R^+ := \bigcup_{n \geq 1} R^n$, se pravi

   $$R^+ := R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \cdots$$

4. Refleksivna tranzitivna ovojnica relacije R je relacija $R^* := \bigcup_{n \geq 0} R^n$, se pravi

   $$R^* := \Delta_A \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \cdots$$