Relacije

Predikat:

Predikat na množici A je lastnost elementov A.

Če je P predikat na A, pišemo

$\underbrace{P(x)}$ → predstavimo z logično formulo

x zadošča P

P velja za x

$\{1,3,10\}$

Primer: P na $\mathbb{N}$

$P(x) :\Leftrightarrow \neg \exists y,z \in \mathbb{N}.\ x = (y+2)(z+2)$ "x je praštevilo"

$P(8)$? Ne, ker je $8 = (0+2)(2+2)$

$P(7)$ Velja

Predikat P na množici A lahko obravnavamo kot

1) Preslikava $P : A \to 2$, ki slika x v resničnostno vrednost $P(x)$

2) Kot podmnožico $P \subseteq A$ tistih elementov $x \in A$, za katere velja $P(x)$.

Relacije

<u>n-členа</u> ali <u>n-mestna</u> relacija R na množicah $A_1, \dots, A_n$ je predikat na $A_1 \times \cdots \times A_n$, t.j.

$$R : A_1 \times \cdots \times A_n \to 2$$

ali $$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$$

<u>Primer</u>: T množica točk v ravnini.

$R(A, B, C) \;:\Leftrightarrow\;$ A, B in C so kolinearne (ležijo na skupni premici)

$R \subseteq T \times T \times T$ trojiška relacija

<u>Primer</u>:

- <u>prazna relacija</u>: $\emptyset \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ $\quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \bot$
- <u>univerzalna relacija</u> (polna): $A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ $\quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \top$

<u>Dvomestna relacija</u>: $R \subseteq A \times B$

domena (A), kodomena (B) relacije R

"R je relacija med A in B."

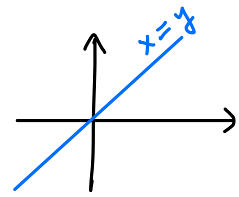
$R \subseteq A \times A$ "R je relacija na A."

Enakost ali diagonala na A:

$$\Delta_A \subseteq A \times A$$

$$\Delta_A = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$$

	a_1	a_2	a_3
a_1	$\top$	$\bot$	$\bot$
a_2	$\bot$	$\top$	$\bot$
a_3	$\bot$	$\bot$	$\top$



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pišemo:

$(x,y) \in R$ $\qquad$ $R \subseteq A \times B$

$R(x,y)$ $\qquad$ $R : A \times B \to 2$

ali R je podana s formulo

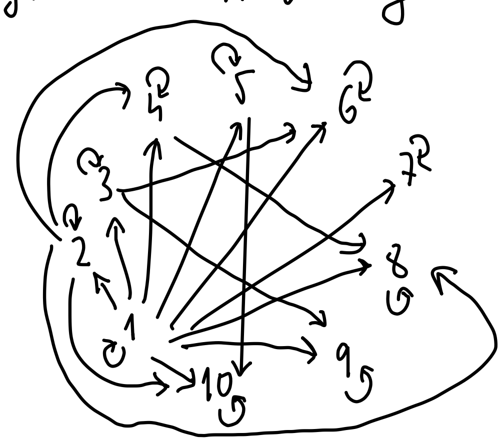
$x \, R \, y$ $\qquad$ pogost, kadar R označujemo s simboli $=, <, \leq, >, \subseteq, \sqsubseteq, \sqsubset, \sqsupset, \equiv, \approx$

$$\leqslant \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Relacija predstavljena z grafom:

$$R \subseteq \{1, 2, \ldots, 10\} \times \{1, 2, \ldots, 10\}$$

$$R(x,y) :\Leftrightarrow x \text{ deli } y$$



Lastnosti relacij

$\neg (\forall x \in A . x R x)$
$\exists x \in A . \neg (x R x)$

Za relacijo R ⊆ A × A pravimo da je:

refleksivna: ∀ x ∈ A . x R x $\leq$
simetrična: ∀ x, y ∈ A . x R y ⇒ y R x
antisimetrična: ∀ x, y ∈ A . x R y ∧ y R x ⇒ x = y . $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
tranzitivna: ∀ x, y, z ∈ A . x R y ∧ y R z ⇒ x R z $\leq$
irefleksivna: ∀ x ∈ A . ¬ (x R x) $<$
asimetrična: ∀ x y ∈ A . x R y ⇒ ¬ (y R x) $<$
sovisna: (∀ x y ∈ A . x ≠ y ⇒ x R y ∨ y R x) $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A . \ x R y \vee x = y \vee y R x)$ $<, \leq$
strogo sovisna: ∀ x y ∈ A . x R y ∨ y R x $\leq$

Operacije na relacijah

$\leq (5,7)$

$R, S \subseteq A \times B$

$x (R \cup S) y \Leftrightarrow x R y \vee x S y$

$\cap \qquad \wedge$

$x (R^c) y \Leftrightarrow \neg (x R y)$

$\cancel{R}$

$\neq \quad \notin \quad \nmid$

Primeri:

$\leq \cup \geq$ je univerzalna relacija

$< \cup >$ je $\neq$

$< \cap >$ je $\emptyset$

$\leq \cap \geq$ je $=$

Transpozicija relacije $R \subseteq A \times B$ je $R^T \subseteq B \times A$

$$y \, R^T \, x \iff x \, R \, y$$

$$R^T = \{ (y, x) \in B \times A \mid x \, R \, y \}$$

$$(R^T)^T = R \qquad {}^T \text{ je involucija}$$

Kompozitum relacij

$$R \subseteq A \times B \quad \text{in} \quad S \subseteq B \times C$$

$$S \circ R \subseteq A \times C$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "S \circ R"'] & B \arrow[r, "S"] & C \end{tikzcd}$$

$$S \circ R := \{ (a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B .\, a R b \wedge b S c \}$$

Primer:

$x \, R \, y$ x je otrok od y

$y \, S \, z$ z je mati od y

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\text{otrok}"] \arrow[rr, bend right, "z \text{ je babica od } x"'] & y \arrow[r, "z \text{ je mati } y"] & z \end{tikzcd}$$

$x \, (S \circ R) \, z$ z je babica od x

Izrek: 1. Kompozitum relacij je asociativen:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] & B \arrow[r, "S"] & C \arrow[r, "T"] & D \end{tikzcd}$$

2. Diagonala je enota za kompozicijo:

$$\Delta_B \circ R = R \ , \quad R \circ \Delta_A = R$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] & B \end{tikzcd}$$

n-ta potenca relacije $R \subseteq A \times A$ je

$$R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n} \qquad R^0 = \Delta_A$$

Primer: otrok

otrok^2 = vnuk-inja

otrok^3 = pravnuk-inja

otrok^0 = enakost

Funkcijske relacije

$$f : A \to B$$

Prirejanje je relacija iz A v B, ki je enolična & celovita.

<u>Def</u>: Relacija $R \subseteq A \times B$, ki je enolična in celovita, je <u>funkcijska</u> relacija.

1. enolična: $\forall x \in A .\ \forall y_1, y_2 \in B .\ xRy_1 \land xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$
2. celovita: $\forall x \in A .\ \exists y \in B .\ xRy$

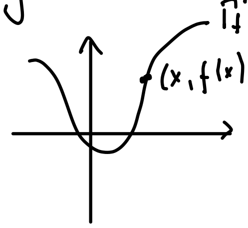
$$(1) \land (2) \iff \forall x \in A .\ \exists! y \in B .\ xRy$$

Če imamo preslikavo $f : A \to B$, ji priredimo relacijo

$$\Gamma_f \subseteq A \times B$$

$$\Gamma_f := \{ (a,b) \in A \times B \mid f(a) = b \}$$

<u>graf</u> funkcije f



Γ_f je funkcijska relacija

Obratno, če imamo funkcijsko relacijo $R \subseteq A \times B$, ji priredimo preslikavo

$$f_R : A \to B$$

$$x \mapsto \iota y \in B .\ xRy$$

"tisti y iz B, za katerega velja xRy."

Ovojnice relacij

$R \subseteq A \times A$

ogrinjača
zaprtje

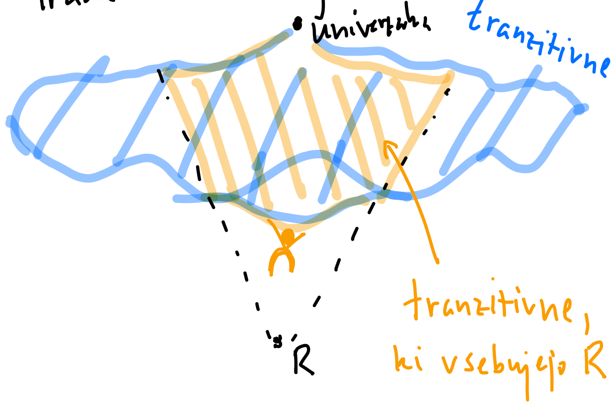
Pravimo, da je $T \subseteq A \times A$ tranzitivna ovojnica R, če velja:

1. T je tranzitivna
2. $R \subseteq T$
3. T je najmanjša tranzitivna, ki vsebuje R:

$$\forall S \subseteq A \times A.\ S \text{ tranzitivna} \land R \subseteq S \Rightarrow T \subseteq S$$

Podobno: simetrična, refleksivna ovojnica, ...

Lema: Presek družine tranzitivnih relacij je tranzitivna relacija.



Tranzitivna ovojnica R je presek vseh tranzitivnih relacij, ki vsebujejo R.