Opomba: na predavanjih bomo najprej še definirali produkte in koprodukte družin množic.

Lastnosti preslikav

Mnogi ste v srednji šoli že spoznali osnovne lastnosti preslikav, kot so injektivnost, surjektivnost in bijektivnost preslikave. V tej lekciji ponovimo te pojme in jih povežemo še s pojmoma monomorfizem in epimorfizem, ki sta pomembna v algebri

Osnovne lastnosti preslikav

Injektivna, surjektivna, bijektivna preslikava

Definicija: Preslikava $f : A \to B$ je

- **injektivna**, ko velja $\forall\, x\ y \in A \,.\, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- **surjektivna**, ko velja $\forall\, y \in B \,.\, \exists\, x \in A \,.\, f(x) = y$
- **bijektivna**, ko je surjektivna in injektivna

Opomba: Pogosto vidimo definicijo injektivnosti, ki pravi, da f slika različne elemente v različne vrednosti, se pravi $\forall\, x\ y \in A \,.\, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Ta definicija je ekvivalentna naši, a jo ne priporočamo, ker je manj uporabna. Naša definicija namreč podaja recept, kako preverimo injektivnost: predpostavimo $f(x) = f(y)$ in od tod izpeljemo $x = y$ tako, da predelamo *enačbo* $f(x) = f(y)$ v enačbo $x = y$. To je v splošnem lažje kot predelava *neenačb* v *neenačbe*.

Naloga: primerjaj definicijo injektivnosti z zahtevo, da mora biti prirejanje, ki določa preslikavo, enolično.

Naloga: primerjaj definicijo surjektivnost z zahtevo, da mora biti prirejanje, ki določa preslikavo, celovito.

Monomorfizmi in epimorfizmi

Definicija: Preslikava $f : A \to B$ je

- **monomorfizem (mono)**, ko jo lahko krajšamo na levi: $\forall\, C \in \mathrm{Set}\ \forall\, g, h : C \to A \,.\, f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

- **epimorfizem* (epi)**, ko jo lahko krajšamo na desni: $\forall\, C \in \mathrm{Set}\ \forall\, g, h : B \to C \,.\, g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

Pojma monomorfizem in epimorfizem sta uporabna, ker nam omogočata, da *krajšamo* funkcije, ki nastopajo v enačbah. Na vajah boste reševali naloge, kjer to pride prav.

Izrek 1: Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ preslikavi.

1. Kompozicija monomorfizmov je monomorfizem.
2. Kompozicija epimorfizmom je epimorfizem.
3. Če je $g \circ f$ monomorfizem, je f monomorfizem.
4. Če je $g \circ f$ epimorfizem, je g epimorfizem.

Dokaz:

1. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ monomorfizma. Dokazujemo, da je $g \circ f$ tudi monomorfizem. Naj bosta $h, k : D \to A$ preslikavi, za kateri velja $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$. Dokazujemo $h = k$. Ker je kompozicija preslikav asociativna, velja $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k = g \circ (f \circ k)$. Ker je g monomorfizem, ga smemo krajšati na levi, torej dobimo $f \circ h = f \circ k$. Ker je f monomorfizem, ga smemo krajšati in dobimo želeno enakost $h = k$.

2. Dokaz je podoben 1, le vloga leve in desne strani se spremeni (vaja).

3. Dokaz je podoben 4, le vloga leve in desne strani se spremeni (vaja).

4. Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ preslikavi in $g \circ f$ epimorfizem. Dokazujemo, da je g epimorfizem. Naj bosta $h, k : C \to D$ taki preslikavi, da velja $h \circ g = k \circ g$. Dokazujemo, da je $h = k$. Iz $h \circ g = k \circ h$ sledi $(h \circ g) \circ f = (k \circ g) \circ f$. Če upoštevamo asociativnost kompozicije, dobimo $h \circ (g \circ f) = k \circ (g \circ f)$. Ker je $g \circ f$ epimorfizem, ga smemo krajšati na desni, od koder dobimo želeno enakost $h = k$. □

Izrek 2: Za preslikavo $f : A \to B$ velja

1. f je monomorfizem ⇔ f je injektivna
2. f je epimorfizem ⇔ f je surjektivna
3. f je izomorfizem ⇔ f je bijektivna

Dokaz:

1. Če je f monomorfizem in $f(x) = f(y)$, tedaj je $(f \circ (u \mapsto x))\ () = f(x) = f(y) = (f \circ (u \mapsto y))\ ()$, torej $(u \mapsto x) = (u \mapsto y)$ torej $x = y$.

   Če je f injektivna in $f \circ g = f \circ h$, potem je za vsak x $f(g(x)) = f(h(x))$, torej $g(x) = h(x)$ za vsak x, torej $g = h$.

2. Če je f epimorfizem: obravnavajmo množico

   $$S = \{ z \in B \mid \exists\, x \in A \,.\, f(x) = z \}$$

   ter preslikavi $\chi\_S : B \to 2$ in $(y \mapsto \top) : B \to 2$. Ker velja $\chi\_S \circ f = (y \mapsto \top) \circ f$, sledi $\chi\_S = (y \mapsto \top)$, torej $S = B$, kar je surjektivnost.

   Če je f surjektivna in $g \circ f = h \circ f$: naj bo $y \in B$. Obstaja $x \in A$, da je $f(x) = y$. Torej je

   $$g(y) = g(f(x)) = h(f(x)) = h(y).$$

   Torej je $g = h$.

3. Če je f izomorfizem, potem

   - f je epi, ker je $id\_B = f \circ f^{-1}$ epi
   - f je mono, ker je $id\_A = f^{-1} \circ f$ mono

   Če je f bijektivna, potem je njen inverz f^{-1} definiran s predpisom

   $f(y) = \iota\, x \in A \,.\, f(x) = y$ "tisti x, ki ga f slika v y"

   Dokazati je treba $\exists!\, x \,.\, f(x) = y$:

   - $\exists\, x \,.\, f(x) = y$ je surjektivnost f
   - $\forall\, x_1\, x_2 \,.\, f(x_1) = y \land f(x_2) = y \Rightarrow x_1 = x_2$ sledi iz injektivnosti f □

Retrakcija in prerez

Spoznajmo še pojem retrakcije in prereza. Na predavanjih bomo s sliko pojasnili, zakaj se tako imenujeta.

Definicija: Če sta $f : A \to B$ in $g : B \to A$ taki preslikava, da velja $f \circ g = id\_B$, pravimo:

- f je **levi** inverz g
- g je **desni** inverz f
- g je **prerez** preslikave f
- f je **retrakcija** iz B na A

Opomba: retrakcija in prerez *ni* isto kot izomorfizem!

Izrek 3: Retrakcija je epimorfizem, prerez je monomorfizem.

Dokaz:

Denimo, da velja $f \circ g = id$, torej je f retrakcija in g prerez. Ker je id monomorfizem, je po izreku 1 tudi g monomorfizem. In ker je id epimorfizem, je po istem izreku f monomorfizem. □

Slike in praslike

Izpeljane množice

Naj bo $f : A \to B$ preslikava. Tedaj definiramo **izpeljano množico**

$$\{ f(x) \mid x \in A \} := \{ y \in B \mid \exists x \in A .\ y = f(x) \}$$

ter **izpeljano množico s pogojem**

$$\{ f(x) \mid x \in A \mid \varphi(x) \} := \{ y \in B \mid \exists x \in A .\ \varphi(x) \land y = f(x) \}$$

Običajno se piše izpeljano množico s pogojem kar

$$\{ f(x) \mid x \in A \land \varphi(x) \}$$

Primer: Množica vseh kvadratov naravnih števil je izpeljana množica $\{ n^2 \mid n \in N \}$.

Slike in praslike

Definicija: Naj bo $f : A \to B$ preslikava:

1. **Praslika** podmnožice $S \subseteq B$ je $f^*(S) := \{ x \in A \mid f(x) \in S \}$.
2. **Slika** podmnožice $T \subseteq A$ je $f_*(T) := \{ y \in B \mid \exists x \in A .\ f(x) = y \}$.

Kot vidimo, lahko sliko zapišemo tudi kot izpeljano množico

$$f_*(T) := \{ f(x) \mid x \in T \}$$

Običajni zapis za prasliko $f^*(S)$ je tudi $f^{-1}(S)$, vendar tega zapisa mi ne bomo uporabljali, ker napačno namiguje, da ima f inverz. Boste pa ta zapis videli marsikje drugje, ker so matematiki pravzaprav precej konzervativni in ne marajo sprememb.

Običajni zapis za sliko $f_*(S)$ je tudi $f(S)$ ali $f[S]$. Predvsem $f(S)$ se uporablja v praksi, a tudi tega odsvetujemo. Kako naj pri takem zapisu ločimo med $f(x)$ in $f_*(\{x\})$?

Zaloga vrednosti je slika domene, torej `f_*(B)`.

Slike in praslike kot preslikave višjega reda

Naj bo `f : A → B`. Tedaj sta tudi `f^*` in `f_*` preslikavi:

- `f^* : P(B) → P(A)` je določena s predpisom `S ↦ { x ∈ A | f(x) ∈ S }`
- `f_* : P(A) → P(B)` je določena s predpisom `T ↦ { f(x) | x ∈ T }`

Še več, tudi "zgoraj zvezdica `^*`" in "spodaj zvezdica `_*`" sta preslikavi

```
^* : B^A → P(A)^P(B)
_* : B^A → P(B)^P(A)
```

Ker slikata preslikave v preslikave, pravimo, da sta to preslikavi *višjega reda*. Primer preslikave višjega reda je tudi odvod, ki funkciji priredi njen odvod.

Lastnosti slike in praslike

Izrek 4: Naj bo `f : A → B` preslikava:

- praslike so monotone: če je `S ⊆ T ⊆ A`, potem je `f_*(S) ⊆ f_*(T)`
- slike so monotone: če je `X ⊆ Y ⊆ B`, potem je `f^*(X) ⊆ f^*(Y)`.

Dokaz: Vaja.

Izrek 5: Prasike ohranjajo preseke in unije: za vse `f : A → B` in `S : I → P(B)` velja

- `f^* (∪_{i ∈ I} S_i) = ∪_{i ∈ I} f^*(S_i)`
- `f^* (∩_{i ∈ I} S_i) = ∩_{i ∈ I} f^*(S_i)`

Dokaz: Dokažimo prvo izjavo, druga je zelo podobna, le da ∃ zamenjamo z ∀.

Dokazujemo `f^* (∪_{i ∈ I} S_i) ⊆ ∪_{i ∈ I} f^*(S_i)`. Naj bo `x ∈ f^* (∪_{i ∈ I} S_i)` in dokazujemo `x ∈ ∪_{j ∈ I} f^*(S_j)`. Ker je `f x ∈ ∪_{i ∈ I} S_i` obstaja `k ∈ I`, da je `f x ∈ S_k`, torej je `x ∈ f^* S_k ⊆ ∪_{i ∈ I} f^*(S_i)`. □

Izrek 6: Naj bo `f : A → B` in `T : I → P(A)`. Tedaj je

- `f_* (∪_{i ∈ I} T_i = ∪_{i ∈ I} f_*(T_i)`.
- `f_* (∩_{i ∈ I} T_i) ⊆ ∩_{i ∈ I} f_*(S_i)`.

Dokaz: Vaja.

Naloga: Iz zgornjih dveh izrekov izpeljite naslednja dejstva:

- `f^*(∅) = ∅`
- `f_*(∅) = ∅`
- `f^*(B) = A`
- `f^*(S ∪ T) = f^*(S) ∪ f^*(T)`
- `f^*(S ∩ T) = f^*(S) ∩ f^*(T)`

Poleg tega imamo za `S ⊆ B`

$$f^*(S^c) = (f^*(S))^c.$$