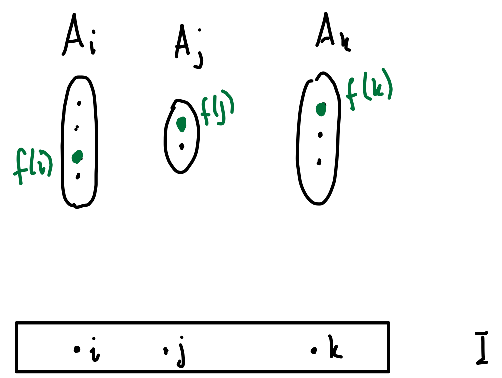
Produkt družine

$$A : I \longrightarrow \mathrm{Set}$$

Funkcija izbire za A je preslikava

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

da velja $f(i) \in A_i$ za vse $i \in I$.



Def: Kartezični produkt družine $A : I \to \mathrm{Set}$ je množica

$$\prod_{i \in I} A_i := \{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I .\ f(i) \in A_i \}$$

Za $j \in I$ je j-ta projekcija preslikava

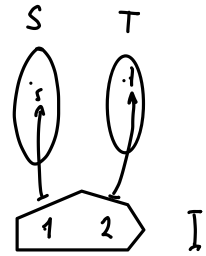
$$\begin{aligned} pr_j : \prod_{i \in I} A_i &\longrightarrow A_j \\ f &\longmapsto f(j) \end{aligned}$$

Primer:

1) Naj bosta S in T množici.

Definirajmo

$$A : \{1,2\} \to \mathrm{Set}$$
$$A_1 := S$$
$$A_2 := T$$



$f \in \prod_{i \in \{1,2\}} A_i$ je določena z vrednostma $f(1)$ in $f(2)$

Torej $\prod_{i \in \{1,2\}} A_i \cong S \times T$

Izomorfizem:

$$f \mapsto (f(1), f(2))$$
$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto s \\ 2 \mapsto t \end{pmatrix} \longleftarrow\!\shortmid (s, t)$$

2) Naj bosta S in T množici.

Definirajmo $A : S \to \mathrm{Set}$ $\quad A_s := T$

$$s \mapsto T$$

$$\prod_{s \in S} A_s = \prod_{s \in S} T \cong T^S$$

$$\| $$

$$\{ f : S \to \bigcup_{s \in S} A_s \mid \forall s \in S .\, f(s) \in A_s \}$$

$$\| \quad (\text{če } S \neq \emptyset)$$

$$\{ f : S \to T \mid \underbrace{\forall s \in S .\, f(s) \in T}_{\text{resnica}} \}$$

Doma: Kaj če $S = \emptyset$?

$$\|$$

$$\{ f : S \to T \mid \text{resnica} \}$$

$$\|$$

$$T^S$$

Koprodukt ali vsota družine

Def: Koprodukt ali vsota družine $A : I \to \mathrm{Set}$ je množica

$$\sum_{i \in I} A_i = \{ in_i(x) \mid i \in I,\ x \in A_i \}$$

elementi oblike $in_i(x)$ za $i \in I$ in $x \in A_i$

$in_j : A_j \to \sum_{i \in I} A_i$ $\quad$ j-ta injekcija

Uporablja se tudi zapis $\coprod_{i \in I} A_i$.

Primeri:

1) S, T množici.

Definiramo $A : \{3, 7\} \to \mathrm{Set}$

$$A_3 := S$$
$$A_7 := T$$

$\sum_{i \in I} A_i$ elementi: $in_3(s)$ za $s \in S$

$in_7(t)$ za $t \in T$

$$\sum_{i \in I} A_i \cong S + T$$

$$in_3(s) \mapsto in_1(s)$$
$$in_7(t) \mapsto in_2(t)$$

(obe smeri: $\longmapsto$ in $\longleftarrow$)

2) S, T množici

Definiramo $A : S \to \mathrm{Set}$

$$A_s := T$$

$$\sum_{s\in S} A_s = \sum_{s\in S} T \cong S\times T$$

$$in_s(t) \longmapsto (s,t)$$

$$in_s(t) \longmapsfrom (s,t)$$

Pogosto se definira kar: $\sum_{i\in I} A_i := \{(i,x) \mid i\in I \text{ in } x\in A_i\}$

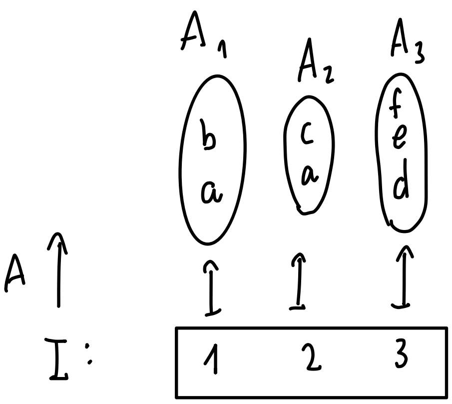
Projekciji:

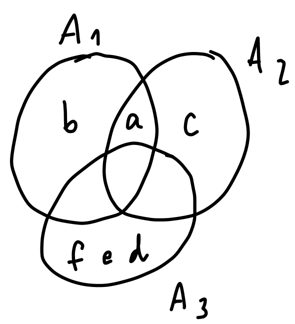
$$pr_1 : \sum_{i\in I} A_i \longrightarrow I$$

$$in_i(x) \longmapsto i$$

$$pr_2 : \sum_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$$

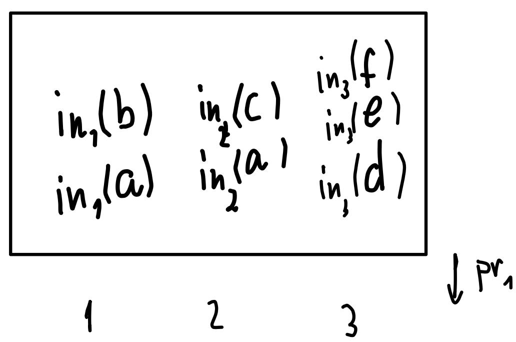
$$in_i(x) \longmapsto x$$





unija $\bigcup_{i\in I} A_i$

6 elementov



vsota $\sum_{i\in I} A_i$

7 elementov

Lastnosti preslikav

$f : A \to B$

- <u>injektivna</u> : $\forall x, y \in A .\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

  (ekvivalentno $\forall x, y \in A .\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$)

  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

- <u>surjektivna</u> : $\forall y \in B .\ \exists x \in A .\ f(x) = y$

Naloga: primerjaj z enoličnostjo & celovitostjo prirejanja

- <u>bijektivna</u> : injektivna in surjektivna

  $\forall y \in B .\ \exists! x \in A .\ f(x) = y$

Mono & epi

<u>Def</u> : Preslikava $f : A \to B$

- <u>monomorfizem (mono)</u>, če jo smemo krajšati na levi

  $\forall C \in Set .\ \forall g, h : C \to A .\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

  $C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$ $\qquad \cancel{f} \circ g = \cancel{f} \circ h$

- <u>epimorfizem (epi)</u>, če jo smemo krajšati na desni

$$\forall C \in Set.\ \forall g,h : B \to C.\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

$$A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C \qquad g \circ \cancel{f} = h \circ \cancel{f}$$

<u>Izrek:</u> Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$

1. Kompozicija monomorfizmov je monomorfizem.
2. –||– epimorfizmov je epimorfizem.
3. Če je $g \circ f$ monomorfizem, je f monomorfizem.
4. Če je $g \circ f$ epimorfizem, je g epimorfizem.

Ideja dokaza:

1. Imamo $f : A \to B$ mono (1)
   $g : B \to C$ mono (2)

$$D \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Ali je $g \circ f : A \to C$ mono?

$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$ zakaj lahko pokrajšam $g \circ f$?

$\Rightarrow \cancel{g} \circ (f \circ h) = \cancel{g} \circ (f \circ k)$ zaradi (2)

$\Rightarrow f \circ h = f \circ k$ zaradi (1)

$\Rightarrow h = k$

4. Imamo $f : A \to B$
   $g : B \to C$

Vemo $g \circ f$ je epi. (1)

Ali je g epi?

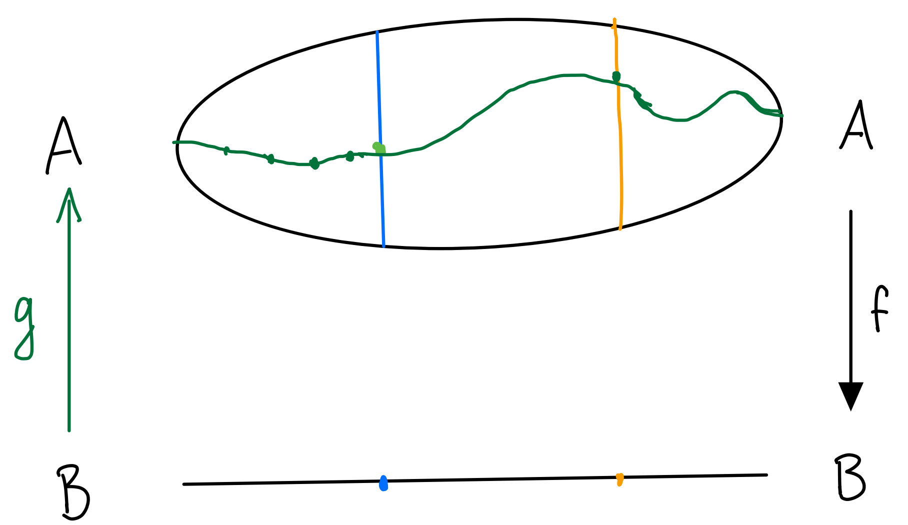
$$h \circ g = k \circ g$$
$$\Rightarrow (h \circ g) \circ f = (k \circ g) \circ f$$
$$h \circ \cancel{(g \circ f)} = k \circ \cancel{(g \circ f)} \quad \text{zaradi (1)}$$
$$h = k$$

<u>Izrek</u>: Naj bo $f : A \to B$

1. f je mono $\Leftrightarrow$ f injektivna
2. f je epi $\Leftrightarrow$ f surjektivna
3. f je izomorfizem $\Leftrightarrow$ f bijektivna

Retrakcija & prerez

<u>Def</u>: Če sta $f : A \to B$ in $g : B \to A$, da velja $f \circ g = id_B$, potem pravimo, da je f <u>retrakcija</u> in g <u>prerez</u>.



Slike & praslike

Izpeljana množica

Naj bo $f: A \to B$.

$\{x \in X \mid \varphi(x)\}$
$\{x \mid \varphi(x)\}$

Izpeljana množica je

$$\{ f(x) \mid x \in A\} := \{ y \in B \mid \exists x \in A . f(x) = y\}$$

$$\{ n^2+1 \mid n \in \{1,2,3\}\} = \{1^2+1, 2^2+1, 3^2+1\} = \{2,5,10\}$$

Izpeljana množica s pogojem

$$\{ f(x) \mid x \in A \mid \varphi(x)\} := \{ y \in B \mid \exists x \in A . \varphi(x) \wedge f(x) = y\}$$

običajno pišemo kar $\{ f(x) \mid x \in A \wedge \varphi(x)\}$.

Primer:

$\{ n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ množica popolnih kvadratov

Slika & praslike:

Definicija: Naj bo $f: A \to B$ preslikava

1. Praslika podmnožice $S \subseteq B$ je

$$f^*(S) := \{ x \in A \mid f(x) \in S\}$$

(Piše se tudi $f^{-1}(S)$.)

2. <u>Slika</u> podmnožice $T \subseteq A$ je

$$f_*(T) := \{ f(x) \mid x \in T \}.$$
$$= \{ y \in B \mid \exists x \in T .\ f(x) = y \}.$$

(Piše se tudi $f(T)$, nihče ne piše $f[T]$, razen LMN, kadar predava prof. Petkovšek.)

Lastnosti:

$$f^*(R \cup S) \stackrel{?}{=} f^*(R) \cup f^*(S)$$

$\cap$ $\qquad\qquad$ $\cap$

f_* $\qquad\qquad$ f_*