Razredi & družine

Russellov paradoks

množica vseh $x \in A$, ki zadoščajo $\varphi(x)$

Podmnožica: $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$

Zakaj pa ne bi imeli

$\{x \mid \varphi(x)\}$ množica vseh x, ki zadoščajo $\varphi(x)$

Veljalo bi: $a \in \{x \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow \varphi(a)$

Vendar je ta ideja protislovna!

<u>Russellov paradoks</u>

Definirajmo $R := \{S \mid S \notin S\}$.

Dokažimo $R \notin R$ in $R \in R$:

1. Dokažimo $R \notin R$:
   Denimo, da bi $R \in R$. (1)
   Po definiciji R sledi $R \notin R$. (2)
   Protislovje (1) in (2).
2. Dokažimo $R \in R$:
   V 1. smo že dokazali $R \notin R$.
   Torej R zadošča pogoju iz definicije R.
   Torej $R \in R$. $\blacksquare$

Množice in razredi

Imamo:

1. Matematični objekti, ki niso množice – urelementi (števila)
2. Zbirke elementov, ki se imenujejo množice.
3. Zbirke elementov, ki se imenujejo razredi.

Razlika med množicami in razredi:

- množica lahko vsebuje urelemente in množice.
- razred lahko vsebuje urelemente in množice.

Razlika? Razred ne more biti element, množica lahko.

$x \in y$ neveljavno, nedefinirano

razred, ki ni množica

Vsaka množica je razred:
Če je S množica, potem ima iste elemente kot razred

$$\{x \mid x \in S\}$$

torej enaka temu razredu.
Pravi razred je razred, ki ni enak nobeni množici.

Primeri pravih razredov:

1. Russellov razred: $R := \{ S \mid S \notin S \}$.
   Ni protislovja, ker je "$R \in R$" neveljavna izjava.
2. Razred vseh množic $V := \{ S \mid S \text{ je množica} \}$
   Pišemo tudi $\mathrm{Set} := \{ S \mid S \text{ je množica} \}$.

   Set je pravi razred:
   Denimo, da je Set množica.
   Tedaj bi lahko definirali podmnožico
   $$R := \{ S \in \mathrm{Set} \mid S \notin S \}$$
   In spet izpeljemo Russellovo protislovje.

3. Razred vseh enojcev $\{ S \mid \underbrace{\exists! x \in S . \top}_{S \text{ vsebuje natanko en element}} \}$.
4. Razred vseh grup
5. Razred vseh vektorskih prostorov.

Z razredi lahko delamo kot z množicami: $C \times D$, $C \cup D$, ...

Paziti je treba pri:
$$P(C) = \{ D \mid \overset{\text{razred}}{D} \subseteq C \} \qquad \text{potenčni razred}$$
ni v redu, ker $\underset{\text{razred}}{C} \in P(C)$

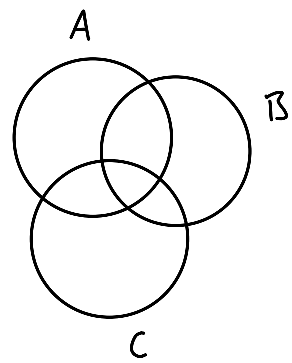
Lahko: $P(C) = \{ D \mid \underset{\text{množica}}{D} \subseteq C \}$ ✓

Družine množic

Zbirka množic:

$A = \dots$
$B = \dots$
$C = \dots$

tri množice



Neskončno množic

$A_0 = \dots$
$A_1 = \dots$
$A_2 = \dots$
$A_3 = \dots$
$\vdots$

Definicija: Družina množic je preslikava $A : I \to \mathrm{Set}$.
Množici I pravimo indeksna množica.

Običajno pišemo A_i namesto $A(i)$.

Primeri:

1. Končna družina: I je končna.

$$I = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 := \{\Delta, \square\} \\ S_2 := \{\Delta, *\} \\ S_3 := \emptyset \\ S_4 := \{\{\Delta\}\} \\ S_5 := \{\Delta, \square, *\} \end{array}\right\} \text{prirejanje, ki določa preslikavo } S : \{1,2,3,4,5\} \to \mathrm{Set}$$

2. Množice v družini se lahko ponavljajo.

$S_1 = \{\Delta, \square\}$
$S_2 = \emptyset$
$S_3 = \{\Delta, \square\}$
$S_4 = \emptyset$
$S_5 = \{\Delta\}$

<u>Konstantna družina</u>: konstantna preslikava $I \to Set$

(preslikava $A : I \to Set$ je konstantna:

$\forall i,j \in I .\ A_i = A_j$)

3. <u>Prazna družina</u>: $I = \emptyset$

$$\emptyset \longrightarrow Set$$

4. <u>Družina praznih množic</u>:

$S : I \longrightarrow Set$
$S_i = \emptyset$ za vse $i \in I$.

5. <u>Neprazna družina</u> $A : I \to Set$, če je $I \neq \emptyset$.
6. <u>Družina nepraznih množic</u>:

$A : I \to Set$
"$A_i \neq \emptyset$ za vse $i \in I$."

Se pravi: $\forall i \in I .\ A_i \neq \emptyset$.

Kaj pa: $\exists i \in I .\ A_i \neq \emptyset$. "Neka članica družine je neprazna"

$\neg \forall i \in I .\ A_i = \emptyset$ "Niso vse prazne."
$\neg \forall i \in I .\ A_i \neq \emptyset$ "Niso vse neprazne."

"Prazna družina je družina nepraznih množic." ✓

$$\forall i \in \emptyset .\ A_i \neq \emptyset$$

Ali je družina praznih množic lahko prazna družina?

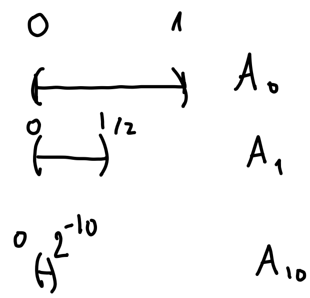
Da, prazna družina je družina praznih množic. ✓

$$\forall i \in \emptyset .\ A_i = \emptyset$$

Konstrukcije in operacije z družinami

<u>Def</u>: <u>Funkcija izbire</u> za družino $A : I \to \mathrm{Set}$ je prirejanje f, ki vsakemu indeksu $i \in I$ priredi element $f(i) \in A_i$.

<u>Primer</u>:



$$A : \mathbb{N} \to \mathrm{Set}$$

$$A_n = (0, 2^{-n}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2^{-n}\}$$

Iščemo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, da velja $f(n) \in A_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$

- $f(n) = 2^{-n-1}$ ✓
- $f(n) = 2^{-n-42}$
- $f(n) = 3^{-n-666}$

$\vdots$

$\cancel{f(n) = \frac{1}{n}}$

Presek in unija družine

Družina $A : I \to \mathrm{Set}$

$\bigcup A$.

$\bigcup_{i \in I} A_i := \{ x \mid \exists i \in I .\, x \in A_i \}$ RAZRED!

$\bigcap_{i \in I} A_i := \{ x \mid \forall i \in I .\, x \in A_i \}$ RAZRED! Sklep (glej spodaj):

$I \neq \emptyset \Rightarrow$ množica

$I = \emptyset \Rightarrow$ pravi razred

<u>Primer:</u> $I = \emptyset$

$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \{ x \mid \exists i \in \emptyset .\, x \in A_i \} = \{ x \mid \bot \} = \emptyset$

$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \{ x \mid \forall i \in \emptyset .\, x \in A_i \} = \{ x \mid \top \} =$ "vse" (Set)

Pravi razred.

Če $I \neq \emptyset$, torej vsebuje neki $j \in I$:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \mid \forall i \in I .\, x \in A_i \}$$

$= \{ x \in A_j \mid \forall i \in I .\, x \in A_i \}$ množica (podmnožica A_j)

<u>Aksiom o uniji:</u> Unija družine množic je množica.