Boolova algebra

Resničnostne tabele

Resničnostna vrednost:

resnica $\top$

neresnica $\bot$

$2 = \{\bot, \top\}$ programiranje (bool, Bool, boolean)

$2 + 2 = 5$ resničnostna vrednost $\bot$

$\bot \vee (\top \wedge \top)$ —||— $\top$

<u>Primer:</u> izjava s spremenljivkami: $x, y \in \mathbb{N}$

$x + y < 3$ resničnostna vrednost <u>odvisna</u> od x in y

x	y	$x+y<3$
0	0	$\top$
0	1	$\top$
1	1	$\top$
0	2	$\top$
1	2	$\bot$
2	2	$\bot$
0	3	$\bot$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

neskončna

Spremenljivki $p \in \{\bot, \top\}$ pravimo <u>izjavna spremenljivka</u>

<u>Primer</u>: $p, q \in 2$.

p	q	$\neg p \vee q$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$

Tabelirana preslikava

$$(p, q) \mapsto \neg p \vee q$$

Izjava $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ kjer $p_1, \dots, p_n \in 2$ določa preslikavo

$$\overbrace{2 \times \cdots \times 2}^{n} \longrightarrow 2$$

$$(p_1, \dots, p_n) \longmapsto \varphi(p_1, \dots, p_n)$$

Boolova preslikava

$$2 \times \cdots \times 2 \longrightarrow 2$$

<u>Tavtologija</u> je izjava, katere vrednost je vedno $\top$, ne glede na vrednosti spremenljivk.

p	q	r	$\dots \varphi \dots$
			$\top$
			$\top$
			$\vdots$
			$\top$

$\}$ vsi $\top$ — tavtologija

<u>Izrek</u>: Naj bo φ izjava, v kateri nastopajo le izjavne spremenljivke $p_1, \dots, p_n$ in $\bot, \top, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (<u>ne</u> dovolimo $\forall, \exists$).

Velja: φ ima dokaz $\Leftrightarrow$ φ tavtologija.

Dokaz: opustimo.

Polni nabori

p	q	?	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\top$	$\top$	$\neg p \wedge q$
$\top$	$\perp$	$\top$	$p \wedge \neg q$
$\top$	$\top$	$\perp$	

Iščemo izjavo, ki ima to dano tabelo.

$$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

iskana formula

Disjunktivna oblika:

p	q	$\neg p \wedge q$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$

disjunktivna oblika: $C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n$

$$C_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_k$$

$$l_j = p_i \text{ ali } \neg p_i$$

Konjunktivna oblika (potrebujemo $\wedge, \vee, \neg$)

p	q	?	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$p \vee q$
$\perp$	$\top$	$\top$	
$\top$	$\perp$	$\top$	
$\top$	$\top$	$\perp$	$\neg p \vee \neg q$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

Nabor logičnih veznikov je poln, če lahko s temi vezniki izrazimo vsako resničnostno tabelo.

Primer: $\wedge, \vee, \neg$ je poln nabor

Primer: $\wedge, \neg$ je poln nabor, ker $p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Protiprimer: $\wedge, \vee$ ni poln.

p	q	?
$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\top$	
$\top$	$\perp$	
$\top$	$\top$	$\perp$

problem

Boolova algebra

$p \Leftrightarrow q$ obravnavamo kot enakost resničnostnih vrednosti in pišemo $p = q$.

$p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge q$ $\qquad$ $p \wedge q = q \wedge p$ komutativna

$(x+y)\cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ distributivnost

$(x \cdot y) + z = (x+z)\cdot(y+z)$? NE VELJA

$(p \wedge q) \vee \neg p$

Boolova algebra: $\wedge, \vee, \neg, \perp, \top$ $\quad (p \Rightarrow q) = (\neg p \vee q)$

$\left.\begin{array}{l} \wedge \\ \vee \end{array}\right\}$ komutativna, asociativna, idempotentna operacija

$\left.\begin{array}{l} \top \wedge p = p \\ \perp \vee p = p \end{array}\right\}$ nevtralni elementi

Distributivnost

Absorbcija

$p \wedge \perp = \perp, \quad p \vee \top = \top$

$p \wedge (p \vee q) = p, \quad p \vee (p \wedge q) = p$

de Morgan: $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

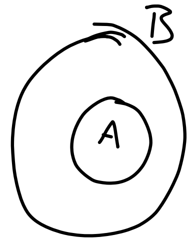
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

$p \wedge \neg p = \perp$

$p \vee \neg p = \top$

Podmnožice & potenčne množice

$$A \subseteq B \;:\Leftrightarrow\; \forall x \in A .\; x \in B$$



$$x \in A \;\Leftrightarrow\; \{x\} \subseteq A$$

Vedno: $\emptyset \subseteq B$, $B \subseteq B$,

$A \cap B \subseteq B$

$$S = T \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in S .\, x \in T) \wedge (\forall y \in T .\, y \in S)$$

$$S = T \;\Leftrightarrow\; S \subseteq T \;\wedge\; T \subseteq S$$

ekstenzionalnost za množice

Kako tvorimo podmnožice

$$\{x \in A \mid \varphi(x)\}$$

x vezana

"množica tistih x iz A, ki zadoščajo pogoju $\varphi(x)$"

Drugi zapisi: $\{x \in A \,;\, \varphi(x)\}$

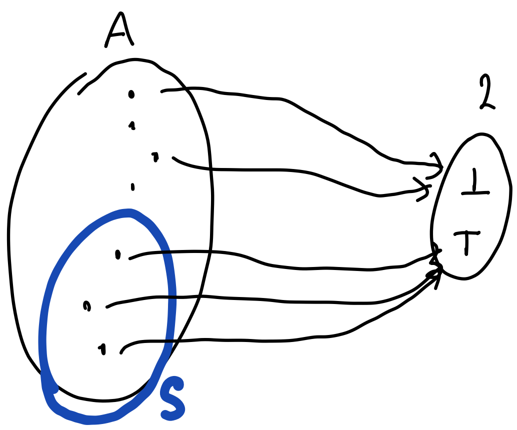
$$a \in \{x \in A \mid \varphi(x)\} \;\Leftrightarrow\; a \in A \wedge \varphi(a)$$

Elementi množice $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ so tisti elementi iz A, ki zadoščajo φ.

Primer: $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3 \geq 7\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 + 3 \geq 7\}$

Velja: $\{x \in A \mid \varphi(x)\} \subseteq A$

Karakteristične funkcije



$$A \xrightarrow{f} 2$$

Def: Preslikava $A \to 2$, s kodomeno $2 = \{\bot, \top\}$, se imenuje <u>karakteristična preslikava</u>.

$\chi \cdot \chi$

$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \eta\ \theta\ \xi\ \varphi\ \varsigma$

$\eta \quad \xi\ \xi$

Vsaka podmnožica $S \subseteq A$ določa karakteristično preslikavo

$$\chi_S : A \to 2$$

$$x \mapsto \begin{cases} \top & \text{če } x \in S \\ \bot & \text{če } x \notin S \end{cases}$$

$$x \mapsto (x \in S)$$

Vsaka karakteristična preslikava $A \xrightarrow{f} 2$ določa podmnožico

$$S_f = \{x \in A \mid f(x) = \top\} = \{x \in A \mid f(x)\}$$

<u>Potenčna množica</u> množice A je

$\mathcal{P}(A)$ elementi so podmnožice A.

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{\triangle, \square\}) = \{\{\}, \{\triangle\}, \{\square\}, \{\triangle, \square\}\}$$

$\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ ima 2^n elementov

Izrek: $\mathcal{P}(A) \cong 2^A$.

Dokaz: Iščemo izomorfizem $\mathcal{P}(A) \to 2^A$. To je kar zgornja preslikava

$$\chi : \mathcal{P}(A) \to 2^A$$
$$S \mapsto (x \mapsto (x \in S))$$

Njen inverz je

$$S : 2^A \to \mathcal{P}(A)$$
$$f \mapsto \{x \in A \mid f(x)\}$$

Preverimo:

1) $\chi \circ S = id_{2^A}$
2) $S \circ \chi = id_{P(A)}$

Potenčna množica $P(A)$ tvori Boolovo algebro za operacije

$\cap$, $\cup$ in komplement
$\wedge$ $\quad\vee$ $\quad\neg$

Zapis za komplement:
$S^c \quad A \setminus S$

$$\cap : P(A) \times P(A) \to P(A)$$
$$(S, T) \mapsto \{x \in A \mid x \in S \wedge x \in T\}$$

$$\cup : P(A) \times P(A) \to P(A)$$
$$(S, T) \mapsto \{x \in A \mid x \in S \vee x \in T\}$$

$${}^c : P(A) \to P(A)$$
$$S \mapsto \{x \in A \mid \neg(x \in S)\}$$