Pravila dokazovanja

Dokaz je skupek računskih korakov in sklepov, s katerimi utemeljimo izjavo. V vsakem trenutku mora biti jasno, kaj dokazujemo, katere spremenljivke so veljavne in katere predpostavke so na voljo. V splošnem imamo v dokazu štiri vrste korakov:

1. Izjavo zamenjamo z njej ekvivalentno.
2. Izraz zamenjamo z njemu enakim (računamo).
3. Uporabimo neko znano dejstvo ali predpostavko.
4. S pravilom vpeljave neposredno dokažemo želeno dejstvo.

Nekateri deli dokaza so samostojni poddokazi pomožnih izjav. Vse spremenljivke in predpostavke, ki jih uvedemo v poddokazu, so na voljo izključno v poddokazu samem.

1 Pravili zamenjave

- Izraz smemo zamenjati z njemu enakim izrazom.
- Izjavo smemo zamenjati z ekvivalentno izjavo.

2 Pravila vpeljave

S pravilom za vpeljavo *neposredno* dokažemo izjavo. Za vsak veznik in kvantifikator ponazorimo, kako uporabimo pripadajoče pravilo vpeljave.

2.1 Konjunkcija

Dokažimo $\phi \land \psi$.

1. *Dokažimo ϕ:* $\ldots \langle$*dokaz* $\phi\rangle \ldots$
2. *Dokažimo ψ:* $\ldots \langle$*dokaz* $\psi\rangle \ldots$

2.2 Disjunkcija

Prvi način:

Dokažimo $\phi \lor \psi$.

Dokažimo ϕ: $\ldots \langle$*dokaz* $\phi\rangle \ldots$

Drugi način:

Dokažimo $\phi \lor \psi$.

Dokažimo ψ: $\ldots \langle$*dokaz* $\psi\rangle \ldots$

2.3 Implikacija

Dokažimo $\phi \Rightarrow \psi$:

> *Predpostavimo ϕ.*
> *Dokažimo ψ:* $\quad \ldots\langle$*dokaz* $\psi\rangle \ldots$

2.4 Ekvivalenca

Dokažimo $\phi \Leftrightarrow \psi$.

1. *Dokažimo $\phi \Rightarrow \psi$:* $\quad \ldots\langle$*dokaz* $\phi \Rightarrow \psi\rangle \ldots$
2. *Dokažimo $\psi \Rightarrow \phi$:* $\quad \ldots\langle$*dokaz* $\psi \Rightarrow \phi\rangle \ldots$

2.5 Resnica

Resnice $\top$ ni treba dokazovati.[1]

2.6 Neresnica

Kadar dokazujemo $\bot$, pravimo, da "iščemo protislovje".

Poiščimo protislovje.

1. *Dokažimo ϕ:* $\quad \ldots\langle$*dokaz* $\phi\rangle \ldots$
2. *Dokažimo $\neg\phi$:* $\quad \ldots\langle$*dokaz* $\neg\phi\rangle \ldots$

2.7 Negacija

Dokažimo $\neg\psi$:

> *Predpostavimo ψ.*
> *Poiščimo protislovje:* $\quad \ldots$

Opomba: ni nujno, da poiščemo protislovje med ψ in $\neg\psi$, vsako protislovje je sprejemljivo.

2.8 Univerzalna izjava

Dokažimo $\forall x \in A \,.\, \phi(x)$.

> *Naj bo $x \in A$.*
> *Dokažemo $\phi(x)$:* $\quad \ldots\langle$*dokaz* $\phi(x)\rangle \ldots$

[1] V praksi $\top$ nastopi kot izjava, ki jo želimo dokazati, ko neko drugo izjavo poenostavimo. Primer: ko dokazujemo $12^2 + 12^2 < 17^2$, najprej izračunamo, da je to ekvivalentno $288 < 289$, kar je ekvivalentno $\top$. S tem je dokaz zaključen, saj smo dobili $\top$.

Pozor: spremenljivka x mora biti *sveža*, se pravi, da je ne uporabljamo nikjer drugje. Če jo, najprej izberemo svežo spremenljivko y in x preimenujemo v y.

2.9 Eksistenčna izjava

Dokažimo $\exists x \in A \,.\, \phi(x)$*:*

Podamo $x := \langle$izraz$\rangle$.
Dokažemo $\langle$izraz$\rangle \in A$*:* $\quad \dots$
Dokažemo $\phi(\langle$izraz$\rangle)$*:* $\quad \dots$

Opomba: $\langle$izraz$\rangle$ sme vsebovati vse proste spremenljivke, ki so trenutno na voljo (x *ni* na voljo).

3 Pravila uporabe

Pravila uporabe nam povedo, kako iz predpostavk in že znanih dejstev izpeljemo nova dejstva.

3.1 Konjunkcija

Vemo, da velja $\phi \wedge \psi$.
Torej velja ϕ.
Torej velja ψ.

Opomba: v praksi tega koraka ne delamo, ampak namesto predpostavke $\phi \wedge \psi$ kar takoj vpeljemo ločeni predpostavki ϕ in ψ.

3.2 Disjunkcija

Dokažimo ρ.
Vemo, da velja $\phi \vee \psi$*, torej obravnavamo primera:*

1. *Če velja* ϕ*:*
   Dokažemo ρ*:* $\quad \dots\langle$*dokaz* $\rho\rangle \dots$
2. *Če velja* ψ*:*
   Dokažemo ρ*:* $\quad \dots\langle$*dokaz* $\rho\rangle \dots$

3.3 Implikacija

Vemo, da velja $\phi \Rightarrow \psi$.

Dokažimo ϕ*:* $\quad \dots\langle$*dokaz* $\phi\rangle \dots$

Torej velja tudi ψ.

3.4 Resnica

Resnica ni uporabna kot predpostavka in jo lahko zavržemo.

3.5 Neresnica

Dokažimo ρ:

> *Ugotovimo, da velja $\perp$.*
> *Ker iz neresnice sledi karkoli, velja ρ.*

3.6 Negacija

Negacijo $\neg\phi$ uporabimo tako, da dokažemo ϕ in zaključimo dokaz.

Dokažimo ρ.
Vemo, da velja $\neg\phi$.

- *Dokažimo ϕ:* $\quad \ldots \langle$*dokaz* $\phi\rangle \ldots$

Torej velja ρ.

3.7 Univerzalna izjava

Vemo, da velja $\forall x \in A \,.\, \phi(x)$.
Vemo, da je $\langle$izraz$\rangle \in A$.
Torej velja $\phi(\langle$izraz$\rangle)$.

3.8 Eksistenčna izjava

Dokažimo ρ.
Vemo, da velja $\exists x \in A \,.\, \phi(x)$.

> *Imamo $x \in A$, za katerega velja $\phi(x)$.*
> *Dokažemo ρ:* $\quad \ldots \langle$*dokaz* $\rho\rangle \ldots$

Pozor: spremenljivka x mora biti sveža, se pravi, da se ne pojavlja v ρ ali kjerkoli drugje. Če se x pojavi kje drugje, ga moramo najprej nadomestiti s svežo spremenljivko y.

4 Izključena tretja možnost in dokaz s protislovjem

Pravilo izključene tretje možnosti pravi, da vedno velja $\phi \lor \neg\phi$ in ga uporabimo takole:

Dokažimo ρ.
Velja $\phi \lor \neg\phi$:

1. *Če velja ϕ:*
   Dokažemo ρ: $\quad \ldots$
2. *Če velja $\neg\phi$.*
   Dokažemo ρ: $\quad \ldots$

Dokaz s protislovjem poteka takole:

Dokažimo ρ. Dokazujemo s protislovjem:

Predpostavimo $\neg\rho$.
Poiščimo protislovje: $\quad \ldots$

Opomba: dokaz s protislovjem in pravilo vpeljave za negacijo sta *različni* pravili!