Definicije in dokazi

Enolični obstoj

$\forall$ za vsak

$\exists$ obstaja (en ali več)

<u>Primer:</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

"f ima <u>vsaj</u> dve ničli"

$\underbrace{\exists x \in \mathbb{R} . \exists y \in \mathbb{R}}_{\exists x, y \in \mathbb{R}} . f(x) = 0 \wedge f(y) = 0$

NI PRAV,
ker je dovoljeno $x = y$.

$(\exists x \in \mathbb{R} . f(x) = 0) \wedge (\exists y \in \mathbb{R} . f(y) = 0)$ ISTA TEŽAVA

$\exists x, y \in \mathbb{R} . x \neq y \wedge f(x) = 0 \wedge f(y) = 0$ ✓

$\exists t \in A . \boxed{\text{log. formula}}$

$x \neq y . f(x) = 0 \wedge f(y) = 0$

Obstaja natanko en x iz A, da velja $\varphi(x)$.

"$\exists x \in A \,.\, \varphi(x)$" obstaja vsaj en

"$\forall y, z \in A \,.\, \varphi(y) \land \varphi(z) \Rightarrow y = z$" največ en

$$\underbrace{(\exists x \in A \,.\, \varphi(x)) \land (\forall y, z \in A \,.\, \varphi(y) \land \varphi(z) \Rightarrow y = z)}_{\exists! \, x \in A \,.\, \varphi(x)}$$ obstaja natanko en

okrajšava

(tudi $\exists^1$)

Enolični opis

$\exists! x \in \mathbb{R} \,.\, x^3 = 2$ tisto realno število, katerega kub je 2.

<u>Primeri</u>:

- tista množica, ki nima elementov, ✓ (prazna)
- tisti $x \in \mathbb{Q}$, za katerega je $x^3 = 2$. ✗ (ga ni)
- tisti $x \in \mathbb{R}$, za katerega je $x^2 = 2$. ✗ (dva sta)

Operator enoličnega opisa:

če velja $\exists! x \in A \,.\, \varphi(x)$, potem

$\iota x \in A \,.\, \varphi(x)$ "tisti x iz A, za katerega velja $\varphi(x)$"

↳ vezana spremenljivka

Primeri:

$\iota x \in \mathbb{R}.\,(x > 0 \wedge x^2 = 2)$ "kvadratni koren iz 2"

$\sqrt{\ }$

$\sqrt{\ } : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$y \mapsto \iota x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.\, x^2 = y$

"y se slika v tisti $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, za katerega je $x^2 = y$."

Definicije in spremenljivke

Kontekst: Trenutno znani/veljavni simboli in predpostavke.

Kako v kontekst dodamo nov simbol ali spremenljivko?

- z definicijo

$S := \ldots \text{izraz} \ldots$

okrajšava za izraz na desni

$\vec{a} := (3, 5, 8)$

def $S := 17^2 - 2 \cdot 12^2$

izjava $S = 1$

- uvedemo (prosto) spremenljivko

"Naj bo $x \in A$."

Def. funkcije

$$f := (x \mapsto x^2 + 7)$$

pišemo tudi $f(x) := x^2 + 7$

Def. z enoličnim opisom:

$$r := (\iota x \in \mathbb{R}.\ x^3 = 2)$$

"Naj bo $r \in \mathbb{R}$ tisto število, ki zadošča $r^3 = 2$."

Def. logične formule:

$$\varphi(x) := (\exists y \in \mathbb{R}.\ y^2 + 1 = x)$$

"$\varphi(x)$ je okrajšava za $\exists y \in \mathbb{R}.\ y^2 + 1 = x$."

Pišemo:

$$\varphi(x) :\Leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R}.\ y^2 + 1 = x)$$

Definicija: Zaporedje števil `$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$` je ***neomejeno***, če za vsak `$x \in \mathbb{R}$` obstaja `$i \in \mathbb{N}$`, da je `$a_i > x$`.

$$\text{neomejeno}(a) :\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}.\ \exists i \in \mathbb{N}.\ a_i > x$$

Dokazi

Konstrukcije:

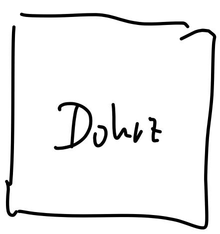
- v geometriji (z ravnilom in šestilom)
- v logiki: dokazi

Dokaz je utemeljitev matematične izjave.

Dokaz utemeljuje neko izjavo.

Izrek/izjava/trditev/lema/posledica: ⟨besedilo izjave⟩

Dokaz:



Več delov

Drevesna struktura:
pod-dokazi,

□ ← konec dokaza

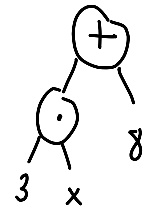
QED

V dokazu v vsakem trenutku vemo:

1. Kaj trenutno dokazujemo – <u>cilj</u>
2. <u>Kontekst</u>: trenutno veljavne spremenljivke in predpostavke, ki so na voljo.

Izjava: $((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$.

$3 \cdot x + 8$



Dokaz:

Dokažimo $(p \vee q) \wedge r \Rightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Predpostavimo $(p \vee q) \wedge r$. (1)

Zaradi (1) velja $p \vee q$. (2)

Zaradi (1) velja r. (3)

Dokažimo $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Zaradi (2) lahko obravnavamo dva primera:

1. Če velja p: (4)

   Dokažimo $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

   Dokažimo $p \wedge r$:

   1.1. p velja zaradi (4)

   1.2. r velja zaradi (3)

2. Če velja q: (5)

   Dokažimo $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

   Dokažimo $q \wedge r$:

   1.1. q velja q zaradi (5)

   1.2. r velja r zaradi (3)

Konec dokaza.

Pravila sklepanja (naravna dedukcija)

Splošna pravila

Pravila sklepanja

- pravila vpeljave
- pravila uporabe

Posebna pravila

Vemo $\forall x \in \mathbb{R} \,.\, x^2 + 1 > \frac{1}{2}$. (1)

$5 \in \mathbb{R}$ ✓

$5^2 + 1 > \frac{1}{2}$ uporabimo (1) $(x := 5)$

Naj bo $y \in \mathbb{R}$.

$\sqrt[3]{y} + 7 \in \mathbb{R}$ ✓

$(\sqrt[3]{y} + 7)^2 + 1 > \frac{1}{2}$ uporabimo (1) $(x := \sqrt[3]{y} + 7)$

Primer:

Naj bo $x \in \mathbb{R}$.

Dokažimo $|2x - 1| \geq 2x - 1$. (1)

Vemo, da velja $2x - 1 > 0$ ali $2x - 1 \leq 0$.

1. Če $2x - 1 > 0$:

   $|2x - 1| = 2x - 1 \geq 2x - 1$ ✓

2. Če $2x - 1 \leq 0$ (2)

   $|2x - 1| = -(2x - 1)$

   Torej (1) zamenjamo z:

   $-(2x - 1) \geq 2x - 1$

   $-2x + 1 \geq 2x - 1$

   $2 \geq 4x$

   $\frac{1}{2} \geq x$ zakaj to velja?

   Ker je to ekvivalentno predpostavki (2)

   $2x - 1 \leq 0 \quad /+1 \quad \Leftrightarrow$

   $2x \leq 1 \quad /:2 \quad \Leftrightarrow$

   $x \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$

   $\frac{1}{2} \geq x$

   ∎

Vpeljava negacije

Dokazujemo $\neg \varphi$.
Predpostavimo φ.
Iščemo protislovje: ....

Dokaz s protislovjem

Dokazujemo φ.
Predpostavimo $\neg\varphi$.
Iščemo protislovje.

$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ to se dokaže s protislovjem

Izrek: $\sqrt{2}$ ni racionalno število.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\neg \exists a, b \in \mathbb{Z} \,.\, b \neq 0 \wedge \sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad (*)$$

Dokaz.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dokazujemo } (*) \\ \quad \text{Predpostavimo } \exists a, b \in \mathbb{Z} \,.\, b \neq 0 \wedge \sqrt{2} = \frac{a}{b}. \\ \quad \text{Iščemo protislovje: } \ldots \end{array}\right\} \text{ dokaz negacije}$$