Še o preslikavah

Nadaljujmo s študijem splošnih preslikav.

Preslikave in prazna množica

Naj bo `A` množica. Kaj vemo povedati o preslikavah `∅ → A`?

Čez nekaj tednov bomo spoznali naslednji dejstvi, ki ju zaenkrat vzemimo v zakup:

- Vsaka izjava oblike "za vsak element `∅` ..." je resnična.
- Vsaka izjava oblike "obstaja element `∅` ..." je neresnična.

Primeri resničnih izjav:

1. "Vsak element prazne množice je sodo število"
2. "Vsak element prazne množice je liho število"
3. "Vsak element prazne množice je hkrati sodo in liho število"
4. "Vsak element prazne množice ..."

Primeri neresničnih izjav:

1. "Obstaja element prazne množice, ki je sodo število"
2. "Obstaja element prazne množice, ki je enak sam sebi"
3. "Obstaja element prazne množice, ki ..."

Denimo, da imamo preslikave `f : ∅ → A` in `g : ∅ → A`. Tedaj sta enaki, saj velja: "za vsak element `x ∈ ∅` je `f(x) = g(x)`". Torej imamo kvečjemu eno preslikavo `∅ → A`. Ali pa imamo sploh kakšno? Da, pravimo ji *prazna* preslikava, ker je njeno prirejanje "prazno", oziroma ga sploh ni treba podati (saj ni nobenega elementa domene `∅`, ki bi mu morali prirediti kak element kodomene `A`).

Sklep: Obstaja natanko ena preslikava `∅ → A`. Pravimo ji *prazna* preslikava.

Kaj pa preslikave `A → ∅`? V tem primeru imamo:

- če je `A = ∅`, potem imamo natanko eno preslikavo `A → ∅`, namreč prazno preslikavo: `∅ᴬ = { prazna-preslikava }`
- če `A` vsebuje kak element, potem ni nobene preslikave `A → ∅`, se pravi `∅ᴬ = ∅`.

Zakaj ni preslikave `A → ∅`, kadar `A` vsebuje kak element? Denimo da je `x ∈ A`. Če bi bila kaka preslikava `f : A → ∅`, bi veljalo `f(x) ∈ ∅`, kar pa ni res. Torej take preslikave ni.

**Naloga:* Koliko je preslikav `1 → A` in koliko je preslikav `A → 1`?

Identiteta in kompozicija

Spoznajmo nekaj osnovnih preslikav in operacij na preslikavah.

Identiteta na `A` je preslikava `id_A : A → A`, podana s predpisom `x ↦ x`.

Kompozitum preslikav

```
  f   g
A → B → C
```

je preslikava `g ∘ f : A → C`, podana s predpisom `x ↦ g(f(x))`.

Kompozitum je asociativen: za preslikave

```
  f   g   h
A → B → C → D
```

velja `(h ∘ g) ∘ f = h ∘ (g ∘ f)`. Res, za vsak `x ∈ A` velja

```
((h ∘ g) ∘ f)(x) =
(h ∘ g) (f x) =
h (g (f (x)) =
h ((g ∘ f)(x)) =
(h ∘ (g ∘ f))(x)
```

torej želena enačba sledi iz principa ekstenzionalnosti za funkcije.

(Opomba: piše se "želen" in ne "željen', ker je "želen" deležnik na "n" glagola "želeti". V slovenščini ni glagola "željeti".)

(Opomba k opombi: hitro boste spoznalo, da je na tej fakulteti treba znati slovnico.)

Identiteta je nevtralni element za kompozitum: za vsako preslikavo `f : A → B` velja

```
id_B ∘ f = f
```

in

```
f ∘ id_A = f
```

To preverimo z uporabo ekstenzionalnosti za funkcije: za vsak `x ∈ A` velja

```
(id_B ∘ f)(x) = id_B (f(x)) = f(x)
```

in

```
(f ∘ id_A)(x) = f (id_A(x)) = f(x)
```

Kompizicija `∘` in identiteta `id` se torej obnašata podobno kot nekatere operacije v algebri, na primer `+` in `0` ter `×` in `1`.

Vprašanje: Seštevanje je komutativno, velja `a + b = b + a`. Ali je kompozicija preslikav tudi komutativna?

Funkcijski predpisi na zmnožku in vsoti

Pogosto želimo definirati preslikavo, katere kodomena je zmnožek množic, denimo `f : A × B → C`. V takem primeru lahko podamo funkcijski predpis takole:

```
(x, y) ↦ ...
```

pri čemer je `x ∈ A` in `y ∈ B`. To je dovoljeno, ker je vsak element domene `A × B` urejeni par `(x, y)` za natanko določena `x ∈ A` in `y ∈ B`.

Primer: Preslikavo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
u &\mapsto pr_1(u)^2 + 3 \cdot pr_2(u)
\end{aligned}
$$

lahko bolj čitljivo podamo s predpisom

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
(x, y) &\mapsto x^2 + 3 \cdot y
\end{aligned}
$$

Seveda lahko podobno podajamo tudi preslikave na zmnožkih večih preslikav. Primeri:

$$
\begin{aligned}
A \times B \times C &\to A \times A \\
(a, b, c) &\mapsto (a, a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X \times (Y \times Z) &\to (X \times Y) \times Z \\
(x, (y, z)) &\to ((x, y), z)
\end{aligned}
$$

Kako pa zapišemo funkcijski predpis funkcije z domeno $A + B$? V tem primeru je vsak element domene bodisi oblike $in_1(x)$ za neki $x \in A$, bodisi oblike $in_2(y)$ za neki $y \in B$, zato funkcijski predpis podamo v dveh vrsticah:

$$
\begin{aligned}
A + B &\to C \\
in_1(x) &\mapsto \ldots \\
in_2(y) &\mapsto \ldots
\end{aligned}
$$

Primer:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} + \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\
in_1(x) &\mapsto x \\
in_2(y) &\mapsto y + 3
\end{aligned}
$$

Seveda lahko podobno podajamo tudi preslikave na vsotah večih preslikav. Primeri:

$$
\begin{aligned}
A + B + C &\to \{u, v\} \\
in_1(x) &\mapsto u \\
in_2(y) &\mapsto u \\
in_3(z) &\mapsto v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A + (B + C) &\to \{u, v\} \\
in_1(x) &\mapsto u \\
in_2(in_1(y)) &\mapsto u \\
in_2(in_2(y)) &\mapsto v
\end{aligned}
$$

Zapisa za zmnožek in vsoto lahko tudi kombiniramo. Na primer:

$$
\begin{aligned}
(A \times B \times C) + (D \times E) &\to \{0, 1, 2\} \\
in_1(a, b, c) &\mapsto 1 \\
in_2(d, e) &\mapsto 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A + B) \times C &\to \{0, 1, 2\} \\
(in_1(a), c) &\mapsto 0 \\
(in_2(b), c) &\mapsto 1
\end{aligned}
$$

Paziti moramo le, da predpis obravnava vse možne primere (celovitost) in da ne obravnava nobenega primera večkrat (enoličnost).

Funkcijski predpis, podan po kosih

Omenimo še en pogost način podajanja funkcij, namreč s predisom po kosih.

Primer: Preslikava "absolutno" je definirana po kosih:

```
ℝ → ℝ

     / -x, če x < 0
x ↦ ⟨
     \  x, če x ≥ 0
```

Primer: Preslikava "predznak" je definirana po kosih:

```
ℝ → ℝ

     / -1, če x < 0
x ↦ ⟨   0, če x = 0
     \  1, če x > 0
```

Pri takem zapisu moramo paziti, da

1. kosi skupaj pokrivajo domeno (vsi elementi domene so obravnavani)
2. kosi se ne prekrivajo (vsak element domene je obravnavan natanko enkrat)

Drugi pogoj včasih nadomestimo tudi s: kosi se smejo prekrivati, a se na skupnih delih skladajo.

Primer: Preslikavo "absolutno" bi lahko podali takole:

```
     / -x, če x ≤ 0
x ↦ ⟨
     \  x, če x ≥ 0
```

Kosa se prekrivata pri `x = 0`, vendar to ni težava, ker je `-0 = 0`.

Nekatere preslikave na eksponentnih množicah

Poglejmo si nekaj preslikav, ki slikajo iz in v eksponente množice.

Evalvacija ali **aplikacija** ali **uporaba** je preslikava, ki sprejme preslikavo in argument, ter preslikavo uporabi na argumentu:

```
ev : Bᴬ × A → B
ev : (f, x) ↦ f(x)
```

Pravimo, da je `ev` **preslikava višjega reda**, ker slika preslikave v vrednosti.

Primer: Določeni integral ∫ od `0` do `1` je funkcija višjega reda, ker sprejme funkcijo `[0,1] → ℝ` in vrne realno število. Je torej preslikava `ℝ^[0,1] → ℝ`.

Kompozitum preslikav je tudi preslikava višjega reda:

```
∘ : Cᴮ × Bᴬ → Cᴬ
∘ : (g, f) ↦ (a ↦ g(f(x)))
```

Tretja splošna preslikava višjega reda je "currying" (ali zna kdo to prevesi v slovenščino?):

```
A^(B × C) → (A^B)^C
f         ↦ (c ↦ (b ↦ f(b, c)))
```

Pravzaprav je to izomorfizem, katerega inverz je

```
(A^B)^C → A^(B × C)
g       ↦ ((b, c) ↦ f(b)(c))
```

Izomorfizmi in artimetika množic

Inverz

Definicija: Preslikava $f : A \to B$ je **inverz** preslikave $g : B \to A$, če velja $f \circ g = id\_B$ in $g \circ f = id\_A$.

Opazimo: če je f inverz g, potem je g inverz f.

Primer: Kub in kubični koren sta inverza

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x & \qquad y \mapsto \sqrt[3]{y} \end{array}$$

Naloga: Naj bo S množica nenegativnih realnih števil, se pravi, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Ali sta inverza kvadriranje in kvadratni koren?

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R} \to S & \qquad S \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 & \qquad x \mapsto \sqrt[2]{x} \end{array}$$

Izjava: Če sta $f : A \to B$ in $g : A \to B$ oba inverza preslikave $h : B \to A$, potem je $f = g$.

Dokaz. Denimo, da sta $f : A \to B$ in $g : A \to B$ inverza preslikave $h : B \to A$. Tedaj velja

$$\begin{aligned} &f = \\ &f \circ id\_A = \\ &f \circ (h \circ g) = \\ &(f \circ h) \circ g = \\ &id\_B \circ g = \\ &g \end{aligned}$$

Ali znate utemeljiti vsakega od zgornjih korakov?

Definicija: Presikava, ki ima inverz, se imenuje **izomorfizem**.

Če je $f : A \to B$ izomorfizem, potem ima natanko en inverz $B \to A$, ki ga označimo f^{-1}.

Primer: Identiteta $id\_A : A \to A$ je izomorfizem, saj je sama sebi inverz. Torej $(id\_A)^{-1} = id\_A$.

Primer: Eksponentna preslikava $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\exp : x \mapsto e^x$ je izomorfizem, njen inverz je naravni logaritem $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, torej $\exp^{-1} = \ln$.

Primer: Eksponentna preslikava $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **ni** izomorfizem.

Izjava: Če sta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ izomorfizma, potem je tudi $g \circ f : A \to C$ izomorfizem.

Dokaz. Dokazati moramo, da ima $g \circ f$ inverz. Trdimo, da je $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$ inverze $g \circ f$. Računajmo:

$$\begin{aligned} &(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \\ &((g \circ f) \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = \\ &(g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1} = \\ &(g \circ id\_B) \circ g^{-1} = \\ &g \circ g^{-1} = \\ &id\_C \end{aligned}$$

Doma sami preverite, da velja tudi $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = id\_A$. □

Ugotovili smo:

```
(g ∘ f)⁻¹ = f⁻¹ ∘ g⁻¹
```

Izomorfne množice

Definicija: Množici `A` in `B` sta **izomorfni**, če obstaja izomorfizem `f : A → B`. Kadar sta `A` in `B` izomorfni, to zapišemo `A ≅ B`.

Izjava: Za vse množice `A`, `B` in `C` velja:

1. `A ≅ A`
2. Če `A ≅ B`, potem `B ≅ A`.
3. Če `A ≅ B` in `B ≅ C`, potem `A ≅ C`.

Dokaz.

1. `id_A` je izomorfizem `A → A`.
2. če je `f : A → B` izomorfizem, potem je tudi `f⁻¹ : B → A` izomorfizem.
3. če je `f : A → B` izomorfizem in `g : B → C` izomorfizem, potem je `g ∘ f : A → C` izomorfizem. □

Primer: `A × B ≅ B × A`, ker imamo izmorfizem in njegov inverz

```
A × B  →  B × A         B × A  →  A × B
(x, y) ↦  (y, x)        (b, a) ↦  (a, b)
```

Aritmetika množic

Veljajo naslednji izomorfizmi, ki nas seveda spomnijo na zakone aritmetike, ki veljajo za števila. Ali gre tu za kako globjo povezavo?

1. $A + \emptyset \cong A$
2. $A + B \cong B + A$
3. $(A + B) + C \cong A + (B + C)$
4. $A \times 1 \cong A$
5. $A \times B \cong B \times A$
6. $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$
7. $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$
8. $A \times \emptyset \cong \emptyset$
9. $A^1 \cong A$
10. $1^A \cong 1$
11. A^∅ ≅ 1
12. $\emptyset^A \cong \emptyset$ če $A \neq \emptyset$
13. A^(B × C) ≅ (A^B)^C
14. A^(B + C) ≅ A^B × A^C
15. (A × B)^C ≅ A^C × B^C

Na predavanjih bomo ponazorili kakšnega od zgornjih primerov.