Še o preslikavah

Preslikave in $\emptyset$

Naj bo A množica. Preslikave $\emptyset \to A$?

Izjava oblike

"Za vsak prazne množice ...." je resnična.

Primeri: Vsak element $\emptyset$ je sodo število. ✓
Vsak element $\emptyset$ je liho število. ✓
Vsak element $\emptyset$ je sod in lih. ✓

Denimo, da sta $f : \emptyset \to A$ in $g : \emptyset \to A$ preslikavi.
Tedaj sta enaki:

preverimo: $\forall x \in \emptyset .\ f(x) = g(x)$ ✓ Torej $f = g$
"za vsak $x \in \emptyset$ velja $f(x) = g(x)$"

Podamo preslikavo $\emptyset \to A$:

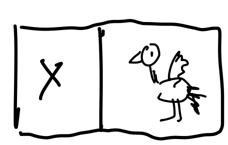
1) domena $\emptyset$
2) kodomena A
3) prirejanje

$\emptyset$	A
x	y

tabela

↑ je prirejanje!

prirejanje $\emptyset \to A$?



✓ je prirejanje

Sklep: Obstaja natanko ena preslikava $\emptyset \to A$, pravimo ji <u>prazna preslikava</u>.

Preslikave $A \to \emptyset$?

1) Če je $A = \emptyset$, tedaj imamo $\emptyset \to \emptyset$, glej prejšnji primer (prazna preslikava)

2) Če A vsebuje kak element, npr. $a \in A$:
   Ni preslikave $A \to \emptyset$:
   če bi imeli $f : A \to \emptyset$, potem $f(a) \in \emptyset$,
   to pa ni možno, ker $\emptyset$ nima elementov.

Identiteta

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A : A &\to A \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$ za poljubno množico A

$\mathrm{id}_A(x) = x$ ostale oznake: id, 1_A, 1

Kompozitum:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f \circ g$

$\cancel{f \circ g}$ ($f ; g$ včasih)

Kompozitum je <u>asociativen</u>

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] \arrow[rrr, bend left=60, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[rrr, bend right=60, "h\circ(g\circ f)"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

Velja: $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

Preverimo: za $x \in A$

$$\begin{aligned}
((h\circ g)\circ f)(x) &= (h\circ g)(f(x)) \\
&= h(g(f(x))) \\
(h\circ(g\circ f))(x) &= h((g\circ f)(x)) \\
&= h(g(f(x)))
\end{aligned}
\quad = \quad \checkmark$$

Druge asociativne operacije: $+$, $\times$

$$\underset{-5}{(3-7)-1} \neq \underset{-3}{3-(7-1)}$$

Identiteta je <u>nevtralna</u> za kompozitum:

$$A \xrightarrow{id_A} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{id_B} B \qquad f \circ id_A = f$$

$$id_B \circ f = f$$

Drugi primeri:

0 je nevtralni za +: $\quad 0 + x = x$
$\quad x + 0 = x$

1 je nevtralni za $\cdot$: $\quad 1 \cdot x = x$
$\quad x \cdot 1 = x$

Preslikave na zmnožkih in vsotah množic

Kako podamo funkcijski predpis

$$X \to Y$$
$$x \mapsto \cdots x \cdots$$

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow C \\ u &\longmapsto \cdots u \cdots \\ (\underset{A}{x}, \underset{B}{y}) &\longmapsto \cdots x \cdots y \cdots \end{aligned}$$

Primer:
$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto pr_1(u)^2 + 3 \cdot pr_2(u) \end{aligned}$$
$\leftarrow$ nihče tako ne piše

Bolje: $(x, y) \longmapsto x^2 + 3 \cdot y$ bolj čitljivo

Lahko tudi $A \times B \times C \longrightarrow D$

$(x, y, z) \longmapsto \cdots x \cdots y \cdots z \cdots$

Kako podamo

$A + B \longrightarrow C$?

$in_1(x) \longmapsto \cdots x \cdots$

$in_2(y) \longmapsto \cdots y \cdots$

To je en funkcijski predpis, ki ima dva primera

<u>Primer:</u>

$A = \{$ superge, sandali, škornji $\}$

$B = \{$ žlica, nož, vilica $\}$

$\text{Izdelek} = A + B$

$\text{cena} : \text{Izdelek} \longrightarrow \mathbb{R}$

$in_1(\text{superge}) \mapsto 50$

$in_1(\text{sandali}) \mapsto 35$

$in_1(\text{škornji}) \mapsto 25$

$in_2(\text{žlica}) \mapsto 2$

$in_2(\text{nož}) \mapsto 3$

$in_2(\text{vilica}) \mapsto \frac{\pi^2}{6}$

Bolj komplicirana pravila:

$A \times B \times C \longrightarrow D$

$(x, y, z) \longmapsto \cdots$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y, z) \mapsto \sin(x) + y^2 - z$

$$(A \times B) \times C \longrightarrow D$$
$$((x, y), z) \longmapsto \cdots$$

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$((x, y), z) \longmapsto \sin(x) + y^2 - z$$

$$A + B + C \longrightarrow D$$
$$\mathrm{in}_1(\overset{A}{x}) \longmapsto \cdots$$
$$\mathrm{in}_2(y) \longmapsto \cdots$$
$$\mathrm{in}_3(z) \longmapsto \cdots$$

$$\mathbb{R} + \mathbb{R} + \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathrm{in}_1(u) \longmapsto u^2$$
$$\mathrm{in}_2(v) \longmapsto v + 7$$
$$\mathrm{in}_3(w) \longmapsto w + 6$$

$$A + (B + C) \longrightarrow D$$
$$\mathrm{in}_1(\overset{A}{x}) \longmapsto \cdots x \cdots$$
$$\mathrm{in}_2(\mathrm{in}_1(\overset{B}{y})) \longmapsto \cdots y \cdots$$
$$\mathrm{in}_2(\mathrm{in}_2(\underset{C}{z})) \longmapsto \cdots z \cdots$$

Ali lahko za $A+B$ namesto in_1 in in_2 pišemo in_A in in_B?

Problem: $A + A$

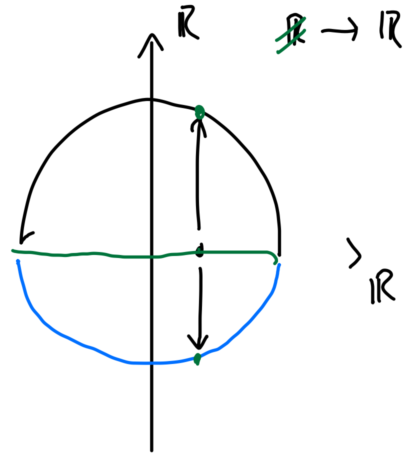
$\mathrm{in}_1(x)$, $\mathrm{in}_2(y)$ ✓

$\mathrm{in}_A(x)$, $\mathrm{in}_A(y)$?!

$$(A \times B \times C) + (D \times E) \longrightarrow \{0, 1, 2\}$$
$$\mathrm{in}_1(\overset{A}{x}, \overset{B}{y}, \overset{C}{z}) \longmapsto 1$$
$$\mathrm{in}_2(\underset{D}{r}, \underset{E}{s}) \longmapsto 0$$

$[-1, 1]$

$\cancel{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$



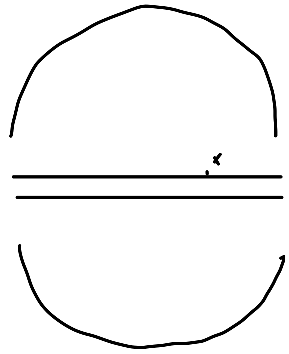
$$(A + B) \times C \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$
$$(\mathrm{in}_1(x), z) \longmapsto 3$$
$$(\mathrm{in}_2(y), z) \longmapsto 3$$

Vprašanje: $(w, z) \mapsto 3$ ✓

$$[-1,1]+[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$in_1(x) \longmapsto \sqrt{1-x^2}$$

$$in_2(x) \longmapsto -\sqrt{1-x^2}$$



Definicija funkcije po kosih:

"Absolutno" $\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{če } x \geq 0 \\ -x & \text{če } x < 0 \end{cases}$$

"po kosih" smo podali prirejanje

$$|7| = \begin{cases} 7 & \text{če } 7 \geq 0 \\ -7 & \text{če } 7 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 7 & \text{če true} \\ -7 & \text{če false} \end{cases} = 7$$

1. Kosi morajo pokrivati celotno domeno
2. Kosi se ne prekrivajo

ali

2.' Kosi se smejo prekrivati, a se skladajo na skupnih delih

Primer:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{če } x \geq 0 \\ -x & \text{če } x \leq 0 \end{cases}$$

Ok, ker $0 = -0$

Izomorfizmi & aritmetika množic

Definicija:

$f : A \to B$ je <u>inverz</u> $g : B \to A$, če

$$f \circ g = id_B \quad \text{in} \quad g \circ f = id_A .$$

Primer: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ in $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

Primer: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ in $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt{t}$? NI INVERZ

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\sqrt{x^2}} = |x| ! \qquad \underset{t \geq 0}{(\sqrt{t})^2} = t$$

$$\neq x \quad \text{za } x < 0$$

Izjava: Če sta $f : A \to B$ in $g : A \to B$ inverza $h : B \to A$, potem $f = g$.

Dokaz:

$$f =$$
$$f \circ id_A =$$
$$f \circ (h \circ g) =$$
$$(f \circ h) \circ g =$$
$$id_B \circ g =$$
$$g$$

Definicija: Preslikava, ki ima inverz, se imenuje <u>izomorfizem</u>.

Primer:

$$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$$
$$\exp: x \mapsto e^{x}$$

je izomorfizem, inverz

$$\ln: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$$

naravni logaritem

Primer:

$$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\exp: x \mapsto e^{x}$$

<u>ni</u> inverz

Če je $f: A \to B$ izomorfizem, njegov inverz označimo f^{-1}.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad \text{izomorfizma}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Def: Množici A in B sta <u>izomorfni</u>, če obstaja izomorfizem $A \to B$.