Logika & množice

Osnovno o množicah

Naivno: množica je skupek/zbirka matematičnih objektov (števila, funkcij, likov, množic, ...)

Množico podamo

$\{1, 2, 3\}$

$\{\sin, \cos, \tan\}$

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$\{1, \{4\}, 4/7\}$

elementi

$a \in M$

"a je element M"

Sta $\{1, 4, 10\}$ in $\{4, 10, 1, 10\}$ enaki?

$\{1, 4, 10\}$?

Ekstenzionalnost množic:

Množici sta enaki, če imata iste elemente.

Povedano drugače: Če je vsak element A tudi element B in je vsak element B tudi element A, potem $A = B$.

Z uporabo ekstenzionalnosti, lahko *dokažemo*, da sta `{1, 4, 10}` in `{4, 10, 1, 10}` enaki:

1. Vsak element `{1, 4, 10}` je tudi element `{4, 10, 1, 10}`:
    * velja `1 ∈ {4, 10, 1, 10}`
    * velja `4 ∈ {4, 10, 1, 10}`
    * velja `10 ∈ {4, 10, 1, 10}`
2. Vsak element `{4, 10, 1, 10}` je tudi element `{1, 4, 10}`:
    * velja `4 ∈ {1, 4, 10}`
    * velja `10 ∈ {1, 4, 10}`
    * velja `1 ∈ {1, 4, 10}`
    * velja `10 ∈ {1, 4, 10}`

Iz 1. in 2. z uporabo ekstenzionalnist·sledi, da `{1, 4, 10} = {4, 10, 1, 10}`.

Primer: $\{x, y\} = \{y, x\}$

Opomba:

$$\{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$$

$$1, 2, 4, 8, \ldots$$

Prazna množica: $\emptyset$ ali $\{\}$

To je množica, ki nima elementov.

Standardni enojec:

Enojec je množica, ki ima natanko en element.

$\{1\}$, $\{42\}$, $\{\emptyset\}$

Standardni enojec: $1 = \{()\}$

?

1

1

1 $100

1 7

1

Množica A je enojec, kadar velja:

- obstaja $x \in A$ in (A ima vsaj en element)
- če $x \in A$ in $y \in A$, potem $x = y$ (A ima največ en element)

Predlog:

Obstaja $x \in A$ in za vsak y, ki je različen od x, velja $y \notin A$.

Ostale množice:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$?

LMN

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

Konstrukcije množic

Zmnožek ali kartezični produkt

Urejeni par (x, y)

Primeri:
$(3, \sqrt[7]{8})$
$(\emptyset, 42)$
$(\{1, 2\}, (3, 4))$

$$(\underset{\text{prva}}{x}, \underset{\text{druga komponenta}}{y})$$

Zmnožek A in B:

- množica $A \times B$
- elementi: urejeni pari (x, y), kjer $x \in A$ in $y \in B$
- $u \in A \times B$ in $v \in A \times B$ sta enaka, če imata enako prvo in enako drugo komponento.

Zapis: $pr_1(u)$ prva komponenta para u
$pr_2(u)$ druga komponenta

$u = (7, 8)$ $\langle 7, 8 \rangle$

$pr_1(u)$ $pr_1((7, 8))$

$pr_1 u$ ✓ $\sin \alpha$ $f(x)$

Torej: $pr_1(x, y) = x$
$pr_2(x, y) = y$

Primer: $(1, 3) = (1, 2+1)$ ker $1 = 1$ in $3 = 2 + 1$.

$(1, 3) \neq (3, 1)$ ker $1 \neq 3$.

Primer:

{1, 2, 3} × {□, ◆} = {(1, □), (2, □), (3, □), (1, ◆), (2, ◆), (3, ◆)}

Vsota ali koprodukt

Vsota množica A in B:

- množica $A + B$
- elementi so $in_1(x)$ za $x \in A$
  ter $in_2(y)$ za $y \in B$

$\underbrace{in_1, in_2}_{\text{simbola, s katerima ločimo elemente A od elementov B}}$ <u>injekcije</u>

Primer:

{1, 2, 3} + {□, ◆} = {in_1(1), in_1(2), in_1(3), in_2(□), in_2(◆)}

{a, b} + {b, c} = {in_1(a), in_1(b), in_2(b), in_2(c)}

Vsota ni unija!
- {3, 5} ∪ {3, 5} = {3, 5}
- {3, 5} + {3, 5} = {in_1(3), in_1(5), in_2(3), in_2(5)}

$in_1(3) = in_1(3)$
$in_1(3) \neq in_2(3)$

Zmnožek in vsota večih množic:

$A \times B \times C$ elementi (x, y, z) $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$

pr_1, pr_2, pr_3

$A + B + C$ elementi $in_1(x)$ $x \in A$
$in_2(y)$ $y \in B$
$in_3(z)$ $z \in C$

Preslikave ali funkcije

Preslikava ima:

- domeno (množica)
- kodomeno (množica)
- prirejanje:
  vsakemu elementu domene priredi natanko en element kodomene

$$f : A \longrightarrow B$$

domena

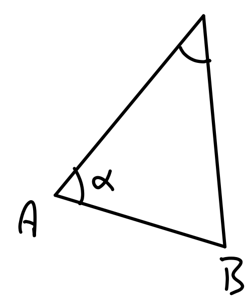
kodomena

preslikava

tudi $A \xrightarrow{f} B$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

tudi $A \longrightarrow B$



Prirejanje $A \to B$ mora biti:

- <u>celovito</u>: za vsak $x \in A$ obstaja (vsaj en) $y \in B$, ki mu je prirejen
- <u>enolično</u>: če sta elementu $x \in A$ prirejena elementa y in $z \in B$, potem $y = z$.

Prirejanje podamo s <u>funkcijskim predpisom</u>

$$x \mapsto \ldots$$

"x se slika v ...."

Primer:

$$\begin{array}{ccc} \text{domena} & & \text{kodomena} \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 3x^2 + 7 \end{array}$$

Predpis uporabimo tako, da za x vstavimo vrednost:

za x vstavimo 5: $3 \cdot 5^2 + 7$

$f(a)$ <u>uporaba ali aplikacija</u> funkcije f na argumentu a

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$f(x) = 3 \cdot x^2 + 7$ $\qquad f = (x \mapsto 3 \cdot x^2 + 7)$

$$f(5) = 3 \cdot 5^2 + 7$$

$$(x \mapsto 3 \cdot x^2 + 7)(5) = 3 \cdot 5^2 + 7$$

Eksponent množic

Eksponent A in B

- množica B^A (pišemo $A \to B$)
- elementi: preslikave z domeno A in kodomeno B

$$\{1,2,3\}^{\{\square, \blacklozenge\}} = \dots \quad 9 \text{ funkcij}$$