2. izpit pri predmetu Kardinalna aritmetika

11. september 2014

Skupni čas reševanja je 240 minut. Veliko uspeha!

	1
	2
	3
	4
	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

"Izračunajte" pomeni, da predstavite ordinalno število v čim preprostejši obliki.

a) Izračunajte $2^{2^{\omega}}$ v ordinalni aritmetiki.

b) Izračunajte $2^{2^{\omega+1}}$ v ordinalni aritmetiki.

2. naloga (25 točk)

Naj bo κ neštevno regularno kardinalno število in $A \subseteq \kappa$. Pravimo, da je A *zaprta neomejena*, če velja:

- neomejenost: za vsak $\alpha < \kappa$ obstaja tak $\beta \in A$, da je $\alpha < \beta$,
- zaprtost: če je $B \subseteq A$ in $|B| < \kappa$, potem $\sup B \in A$.

Naj bo $\mathcal{C}$ družina vseh zaprtih neomejenih podmnožic κ in $\mathcal{F}$ množica

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq \kappa \mid \exists A \in \mathcal{C} \,.\, A \subseteq B\}.$$

a) (15 točk) Dokažite, da $\mathcal{F}$ tvori filter na κ.

b) (10 točk) Dokažite, da je $\mathcal{F}$ zaprt za števne preseke: če je $(B_n)_{n\in\omega}$ družina množic, da velja $B_n \in \mathcal{F}$ za vsak $n \in \omega$, potem je $\bigcap_{n\in\omega} B_n \in \mathcal{F}$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo A poljubna množica in $S = \{\{x\} \mid x \in A\}$ množica vseh enojcev elementov iz A.

a) (15 točk) Dokažite, da velja $\operatorname{rang}(A) \leq \operatorname{rang}(S) \leq \operatorname{rang}(A) + 1$.

b) (5 točk) Ali se lahko zgodi $\operatorname{rang}(S) = \operatorname{rang}(A)$?

c) (5 točk) Ali se lahko zgodi $\operatorname{rang}(S) = \operatorname{rang}(A) + 1$?

4. naloga (25 točk)

Naj bo κ neskončno kardinalno število.

a) Koliko je vseh bijektivnih preslikav $\kappa \to \kappa$?

b) Koliko je vseh injektivnih preslikav $\kappa \to \kappa$?

c) Koliko je vseh surjektivnih preslikav $\kappa \to \kappa$?