Najprej obravnavajmo unijo družine `A : N → Set`, kjer je `A_n` števna za vse `n ∈ N`. Tu uporabimo aksiom izbire, da dokažemo števnost unije. Za vsak `n ∈ N` obstaja surjektivna preslikava `N → A_n + 1`. Po aksiomu izbire obstaja preslikava
`e : ∏_{n ∈ N} { f : N → A_n + 1 | f surjekcija }.`
Definiramo `e' : N × N → 1 + ∪_n A_n`:
`e'(n, k) = e(n)(k).`
Trdimo, da je `e'` surjekcija iz `N × N` na `1 + ∪_n A_n`.
Nato obravnavamo še unijo družine `A : I → Set`, kjer je `I` števna in `A_i` števna za vsak `i ∈ I`.
□

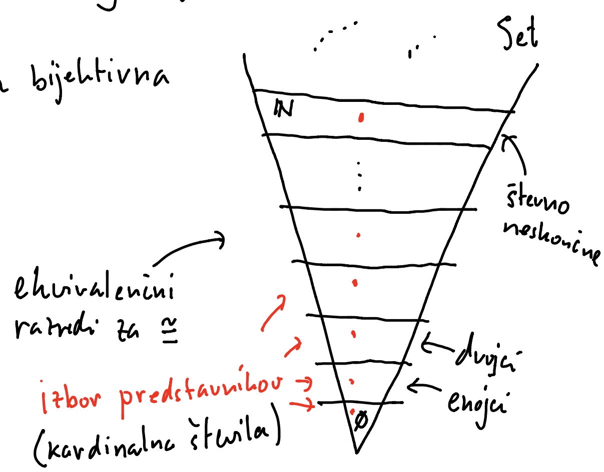
Moč množic 2

Ponovimo:

$|A|$ moč množice: "kardinalno število"

$|A| \leq |B| \iff \exists f : A \to B .\ f$ injektivna
$\iff A = \emptyset \vee \exists g : B \to A .\ g$ surjektivna

$|A| = |B| \iff \exists h : A \to B .\ h$ bijektivna
$\iff A \cong B$



$|A| < |B| \iff |A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$

Lastnosti relacije $\leq$: linearna ureditev

- $|A| \leq |A|$ ✓
- $|A| \leq |B|$ in $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$ ✓ } "očitno"
- $|A| \leq |B|$ in $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$? Cantor-Schröder-Bernsteinov izrek

  $A \xrightarrow[f]{\text{inj}} B \qquad B \xrightarrow[g]{\text{inj}} A \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \exists h : A \xrightarrow{\cong} B$
- $|A| \leq |B|$ ali $|B| \leq |A|$ ✓ ni očitno

<u>Izrek (Cantor)</u>: Za vsako množico A velja $|A| < |P(A)|$.

<u>Dokaz</u>: $|A| < |P(A)| \iff \underset{(1)}{|A| \leq |P(A)|} \wedge \underset{(2)}{|A| \neq |P(A)|}$

(1) $|A| \leq |P(A)| \iff \exists f: A \to P(A)$. f injektivna

Vzemimo $f := (x \mapsto \{x\})$. Preverimo f injektivna: očitno (vaja).

(2) $|A| \neq |P(A)| \iff \neg \exists h: A \to P(A)$. h bijekcija

$\iff \forall h: A \to P(A)$. h ni bijekcija

Naj bo $h: A \to P(A)$. Dokazujemo: h ni bijekcija.

Dovolj je pokazati: h ni surjekcija.

$\neg \forall S \in P(A) . \exists x \in A . S = h(x)$.

$\iff \exists S \in P(A) . \forall x \in A . S \neq h(x)$.

Vzemimo $S := \{ y \in A \mid y \notin h(y) \}$

Preverimo $\forall x \in A . S \neq h(x)$:

Naj bo $x \in A$. Dokazujemo $S \neq h(x)$.

Predpostavimo $S = h(x)$. Iščemo protislovje:

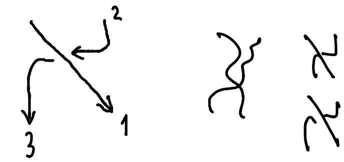
- dokažimo $x \notin S$:
  Predp $x \in S$, iščemo protislovje:
  Po def S sledi $x \notin h(x) = S$, protislovje

- dokažimo $x \in S$: s protislovjem
  predp $x \notin S$, iščemo protislovje:
  $x \notin S = h(x)$ torej $x \in S$ po def S, protislovje

$\square$

Izrek : Števna unija števnih množic je števna.

Spomnimo se : A števna $\Leftrightarrow$ $|A| \leq |\mathbb{N}|$ $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ alef nič



Dokaz : (Primer, ko imamo števno neskončno družino.)

Naj bo $A : \mathbb{N} \to \mathrm{Set}$ družina množic.

Predpostavka : $\forall n \in \mathbb{N} .\ A_n$ je števna.

Dokazujemo : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ števna.

Najprej obravnavajmo unijo družine `A : N → Set`, kjer je `A_n` števna za vse `n ∈ N`.

Tu uporabimo aksiom izbire, da dokažemo števnost unije.

Za vsak `n ∈ N` obstaja surjektivna preslikava `N → A_n + 1`.

S_n = množica surjekcij $\mathbb{N} \to A_n + 1$ $S : \mathbb{N} \to \mathrm{Set}$

$\forall n \in \mathbb{N} .\ S_n \neq \emptyset .$

Po aksiomu števne izbire obstaja funkcija izbire

S_n

```
e ∈ ∏_{n ∈ N} { f : N → A_n + 1 | f surjekcija }.
```

$e(n) : \mathbb{N} \to A_n + 1$ surjektivna

Definiramo . $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\cong \mathbb{N}$

```
e' : N × N → 1 + ∪_n A_n:
e'(n, k) = e(n)(k).
```

$\underbrace{e(n)(k)}_{\text{preslikava } e(n) \text{ uporabljena na } k}$

Trdimo, da je `e'` surjekcija iz `N × N` na `1 + ∪_n A_n`..

Naj bo $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Za neki $m \in \mathbb{N}$, $y \in A_m$. Ker je $e(m) : \mathbb{N} \to 1 + A_m$ surjektivna obstaja $\ell \in \mathbb{N}$, $e(m)(\ell) = \iota_1(y)$

$$e(m)(\ell) = e(m, \ell)$$

Nato obravnavamo še unijo družine `A : I → Set`, kjer je `I` števna in `A_i` števna za vsak `i ∈ I`.

∎