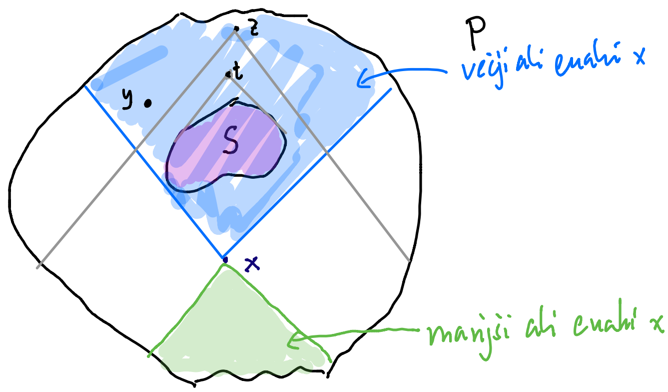
Meje:

Definicija: Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost, $S \subseteq P$ in $x \in P$:

- x je **spodnja meja** podmnožice S, ko velja $\forall\ y \in S\ .\ x \leq y$
- x je **zgornja meja** podmnožice S, ko velja $\forall\ y \in S\ .\ y \leq x$
- x je **infimum** ali **največja spodnja meja** ali **natančna spodnja meja** podmnožice S, ko je spodnja meja S in velja: za vse $y \in P$, če je y spodnja meja S, potem je $y \leq x$
- x je **supremum** ali **najmanjša zgornja meja** ali **natančna zgornja meja** podmnožice S, ko je zgornja meja S in velja: za vse $y \in P$, če je y zgornja meja S, potem je $x \leq y$
- x je **minimalni element** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall\ y \in S\ .\ y \leq x \Rightarrow x = y$
- x je **maksimalni element** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall\ y \in S\ .\ x \leq y \Rightarrow x = y$
- x je **najmanjši** ali **prvi** element ali **minimum** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall\ y \in S\ .\ x \leq y$
- x je **največji** ali **zadnji** element ali **maksimum** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall\ y \in S\ .\ y \leq x$

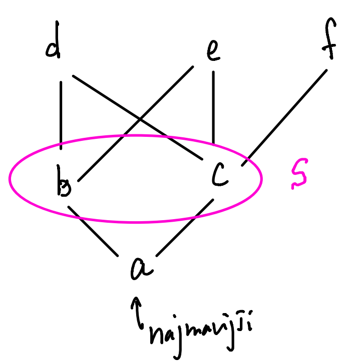
Opozorilo: minimalni element ni isto kot minimum (in maksimalni element ni isto kot maksimum).

x je spodnja meja S
z je zgornja meja za S
t je supremum S



Primer

inf $S = a$
sup S ni definiran



Zgornje meje S: d, e
Spodnje meje S: a
Infimum S: a
Supremum S: ni supremuma
Maksimalni el. S: b, c
Maksimum v S: ni
Minimalni el. S: b, c
Minimum v S: ni

Izrek: Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost in $S \subseteq P$.
Tedaj ima S največ en supremum in največ en infimum, ki ju zapišemo $\sup S$, $\bigvee S$, $\bigvee_{x \in S} S$ (supremum)

$\inf S$, $\bigwedge S$, $\bigwedge_{x \in S} S$ (infimum)

Dokaz:

Denimo, da sta x in y oba supremuma S. Iz definicije sup sledi:

a) x in y sta zgornji meji S

b) x je najmanjša zg. meja S

c) y je najmanjša zg. meja S

Dokažimo $x = y$:

a) + b) $\Rightarrow$ $x \leq y$ a) + c) $\Rightarrow$ $y \leq x$

antisimetričnost

$x = y$.

Infimum podobno. ∎

Mreža

Def: Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost.

1. $(P, \leq)$ je <u>mreža</u>, ko imata vsaka dva elementa $x, y \in P$ infimum in supremum.
2. $(P, \leq)$ je <u>omejena mreža</u>, ko ima vsaka končna podmnožica P infimum in supremum.
3. $(P, \leq)$ je <u>polna mreža</u>, ko ima vsaka podmnožica P infimum in supremum.

Opomba: $(P,\leq)$ je mreža $\iff$ vsaka <u>neprazna</u> končna podmnožica v P ima inf in sup

$n \geq 1$ $$\bigvee\{x_1,\dots,x_n\} = (((\underbrace{x_1 \vee x_2}_{=\,\sup\{x_1,x_2\}}) \vee x_3) \vee \dots) \vee x_n$$

Preveriti: $a \vee b$ komutativna & asociativna!

Kaj je infimum prazne množice?

$\inf \emptyset$ za $\emptyset \subseteq P$?

Spodnje meje $\emptyset$: x je spodnja meja za $\emptyset$ $\iff$ $\underbrace{\forall y \in \emptyset.\ x \leq y}_{\top}$ $\iff$

Vsak $x \in P$ je spodnja meja za $\emptyset$.

$\inf \emptyset$ = največji element P (če obstaja!)

Simetrično

$\sup \emptyset$ = najmanjši element P (če obstaja)

<u>Primeri</u>:

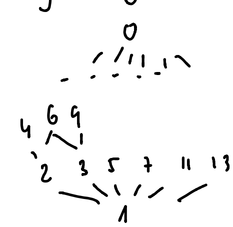
$(\mathbb{N},\leq)$ mreža, ni omejena

$(\mathbb{N}, \mid)$

$\left.\begin{array}{l}\inf(a,b) = \text{največji skupni delitelj} \\ \sup(a,b) = \text{najmanjši skupni večkratnik}\end{array}\right\}$ mreža

$\inf(0,7) = 7$

$\left.\begin{array}{l}\inf \emptyset = 0 \text{ je največje} \\ \sup \emptyset = 1 \text{ je najmanjši}\end{array}\right\}$ omejena



$S \subseteq \mathbb{N}$

$\inf S$?

$\sup S$?

polna mreža

- Potenčna množica $(P(A), \subseteq)$ je polna mreža:

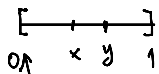
$S \subseteq P(A)$

$\sup S$ = najmanjša podmnožica A, ki vsebuje vse podmnožice iz S

$= \bigcup S$

$\inf S = \bigcap S$

- $([0,1], \leq)$



najmanjši

največji

$\inf(x,y) = \min(x,y)$

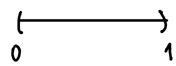
omejena mreža

$\boxed{\text{Vsaka linearna ureditev je mreža!}}$

$x \leq y \Rightarrow \inf(x,y) = x$

$y \leq x \Rightarrow \inf(x,y) = y$

- $((0,1), \leq)$



mreža (ker linearna ureditev)

ni omejena

ali je $([0,1], \leq)$ polna mreža?

$S \subseteq [0,1]$

$$\sup S = \begin{cases} 0 & \text{če } S = \emptyset \\ \text{če } S \neq \emptyset, & \text{potem je } S \text{ neprazna \& omejena} \Rightarrow \text{ima sup po Dedekindovem aksiomu} \end{cases}$$