Aksiom izbire (AC): Vsaka družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.

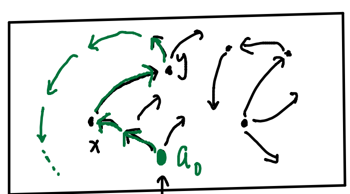
Aksiom odvisne izbire (DC):

Naj bo A neprazna množica in $R \subseteq A \times A$ celovita relacija, t.j.,

$$\forall x \in A \,.\, \exists y \in A \,.\, x R y.$$

Tedaj obstaja zaporedje $a : \mathbb{N} \to A$, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n R \, a_{n+1}$.

$x \to y$ pomeni xRy



ni prazna
imamo element

$$AC \Rightarrow DC$$

Moč množic

Končne množice

Def: Standardna končna množica je (za $n \in \mathbb{N}$)

$$[n] := \{ k \in \mathbb{N} \mid k < n \}$$

Torej:

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{k \in \mathbb{N} \mid k < 0\} = \{\} \\
[1] &= \qquad\qquad\qquad\quad = \{0\} \\
[2] &= \qquad\qquad\qquad\quad = \{0, 1\} \\
[3] &= \qquad\qquad\qquad\quad = \{0, 1, 2\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Def: Množica je končna, če je izomorfna kaki standardni končni množici.

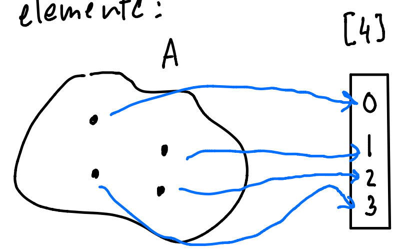
Če je $A \cong [m]$ in $A \cong [n]$, potem je $[m] \cong [n] \Rightarrow m = n$

(dokaz z indukcijo po m in n)

Končna množica A je izomorfna natanko eni standardni končni $[n]$.

Pravimo, da je n <u>moč množice</u> A.

Štejemo elemente:



<u>Oznaka</u>: $|A|$ moč množice (A končna).

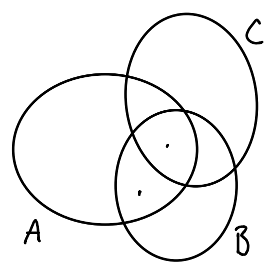
Zakoni:

$$|[n]| = n$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$$|A + B| = |A| + |B|$$

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Neskončne množice:

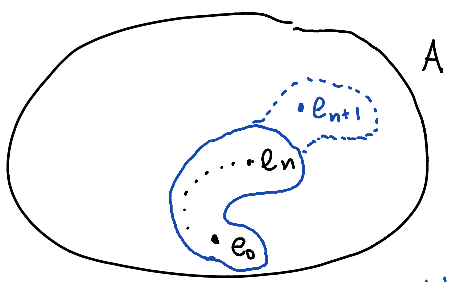
Def: Množica je neskončna, če ni končna.

Izrek: Množica A je neskončna natanko tedaj, ko obstaja injektivna $\mathbb{N} \to A$.

Dokaz:

($\Rightarrow$) A ni končna. Iščemo injektivno $e : \mathbb{N} \to A$.

Ideja: uporabimo aksiom odvisne izbire.



$e_0 \in A$ obstaja ker $A \neq \emptyset$

$A \setminus \{e_0, \dots, e_n\}$ je neprazna, sicer bi imeli $A = \{e_0, \dots, e_n\} \cong [n]$

($\Leftarrow$) Denimo, da imamo $e : \mathbb{N} \to A$ injektivno. Dokazujemo: $\neg \exists n \in \mathbb{N} . A \cong [n]$.

Če $A \cong [n]$ za neki $n \in \mathbb{N}$, bi imeli izomorfizem $f : A \to [n]$

$$\mathbb{N} \xrightarrow[\text{injektivna}]{e} A \xrightarrow[\text{izo}]{f} [n]$$

$f \circ e : \mathbb{N} \longrightarrow [n]$ injektivna, kar ni mogoče (dokaže se z indukcijo na n)

$\blacksquare$

Števne in neštevne množice:

<u>Def</u>: A je <u>števna množica</u>, če obstaja injektivna $A \to \mathbb{N}$

A je <u>neštevna</u>, če ni števna.

<u>Izrek</u>: Naj bo A množica. Ekvivalentno je:

1. A je števna.
2. A je prazna ali pa obstaja surjektivna $\mathbb{N} \to A$
3. obstaja surjektivna preslikava $\mathbb{N} \to 1 + A$ $\qquad 1 = \{*\}$
4. A je končna ali izomorfna $\mathbb{N}$.

Moč množic:

Ideja: $|A|$ "$\underbrace{\text{število}}_{}$ elementov A"

kakšno "število" je to?

<u>Def</u>:

1. A ima <u>enako moč</u> kot B, pišemo $|A| = |B|$, če $A \cong B$.
2. A ima <u>moč manjšo ali enako</u> moči B, pišemo $|A| \leq |B|$, če obstaja injektivna $f : A \to B$.
3. A ima moč <u>manjšo</u> od moči B, pišemo $|A| < |B|$, če $|A| \leq |B|$ in $|A| \neq |B|$.

<u>Izrek</u> (Cantor): Za vsako množico A velja $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Dokaz: naslednje leto.