Kanonični razcep preslikave

<u>Izrek</u>: Vsako preslikavo $f: A \to B$ lahko razcepimo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & & B \\
& \cdot \arrow[r, tail, two heads, "b"'] & \cdot \arrow[ur, tail, "m"'] &
\end{tikzcd}
\qquad f = m \circ b \circ q$$

kjer je q surjektivna, b bijektivna in m injektivna.

<u>Dokaz.</u>

f na A porodi ekvivalenčno relacijo $\sim_f$ s predpisom

$$x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$$

Torej imamo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & & B \\
& A/\sim_f \arrow[r, "b"'] & f_*(A) \arrow[ur, tail, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

x $\quad$ $[x]_{\sim_f}$ $\quad$ $f x$

$f_*(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

$q(x) = [x]_{\sim_f}$

$m(x) := x$

$b([x]_{\sim_f}) := f(x)$

Preverimo, ali je b dobro definiran:

$$x \sim_f x' \overset{?}{\Rightarrow} f(x) = f(x') \ \checkmark \ \text{definicija } \sim_f$$

$$m(b(q(x))) = m(b([x]_{\sim_f})) = m(f(x)) = f(x)$$

Ali je je b bijektivna?

- surjektivna: $y \in f_*(A) \Rightarrow$ obstaja $x \in A$, da je $y = f(x)$, torej $y = f(x) = b([x]_{\sim_f})$.
- injektivna: $b([x]_{\sim_f}) = b([x']_{\sim_f}) \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x \sim_f x' \Rightarrow [x]_{\sim_f} = [x']_{\sim_f}$. $\blacksquare$

Opomba: Običajno b pridružimo q ali m in dobimo razcep

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B \\ & \cdot \arrow[ur, tail, "m"'] & \end{tikzcd}$$

q surjektivna
m injektivna

Konkretno:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B \\ & A/\sim_f \arrow[ur, tail, "m"'] & \end{tikzcd}$$

$q(x) = [x]_{\sim_f}$

$m([x]_{\sim_f}) = f(x)$

Lahko tudi:

Najbolj običajni razcep

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q"'] & & B \\ & f_*(A) \arrow[ur, tail, "m"'] & \end{tikzcd}$$

$m(x) := x$

$q(x) := f(x)$

Opomba: Razcep je enolicen do izomorfizma natančno.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, tail] \arrow[dd, "\cong"] & \\ A \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & B \\ & Y \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

Relacije urejenosti

Def: Relacija $R \subseteq A \times A$ je

- šibka urejenost: refleksivna in tranzitivna
- delna urejenost: refleksivna, tranzitivna in antisimetrična ($\forall x,y \in A.\ xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$)
- linearna urejenost: delna in sovisna ($\forall x,y \in A.\ xRy \vee yRx$)

Običajni simboli: $\leq, \sqsubseteq, \subseteq, \preccurlyeq, \dots$ in $\geq, \sqsupseteq, \supseteq, \succcurlyeq$

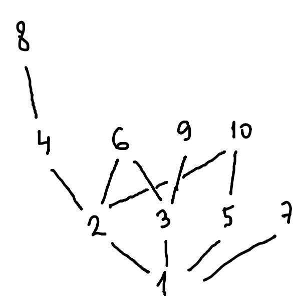
Primeri:

$\exists k \in \mathbb{N}.\ b = a \cdot k$

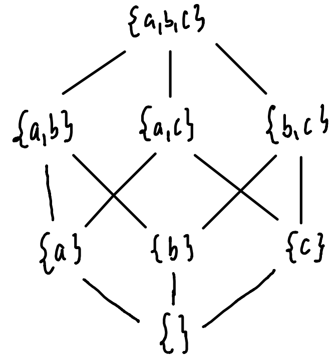
1. Deljivost na $\mathbb{N}$: $a \mid b$ a deli b delna, ni linearna
2. Deljivost na $\mathbb{Z}$: $a \mid b$ šibka, ni delna $2 \mid -2$ in $-2 \mid 2$ vendar $2 \neq -2$
3. $\leq$ na $\mathbb{R}$ je linearna
4. $\geq$ na $\mathbb{R}$ je linearna
5. Relacija $\subseteq$ na $P(A)$: delna, kdaj linearna?
6. Relacija $=$ na A: delna

Hassejev diagram (za delne urejenosti)

- relacija deljivosti na $\{1,2,3,\dots,10\}$



- relacija $\subseteq$ na $P(\{a,b,c\})$

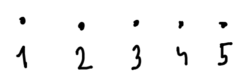


- linearna

$\leq$ na $\{1,2,3,4,5\}$

navpično, se ne veji

- relacija $=$ na $\{1,2,3,4,5\}$



Konstrukcije

Obratna urejenost:

Če je $\leq$ urejenost na A, definiramo transponirano ali <u>obratno</u> relacijo

$$x \geq y \iff y \leq x$$

- $\leq$ delna $\iff$ $\geq$ delna
- $\leq$ linearna $\iff$ $\geq$ linearna

Produktna in leksikografska ureditev:

$(P, \leq)$ in $(Q, \sqsubseteq)$ delni urejenosti:

Na $P \times Q$ definiramo

- <u>produktna</u> urejenost $\leq_{P\times Q}$

$$(x_1, y_1) \leq_{P\times Q} (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \text{ in } y_1 \sqsubseteq y_2$$

- <u>leksikografska</u> $\leq_{lex}$

$x_1 < x_2$

$(x_1 \leq x_2 \wedge x_1 \neq x_2)$

↓ popravek

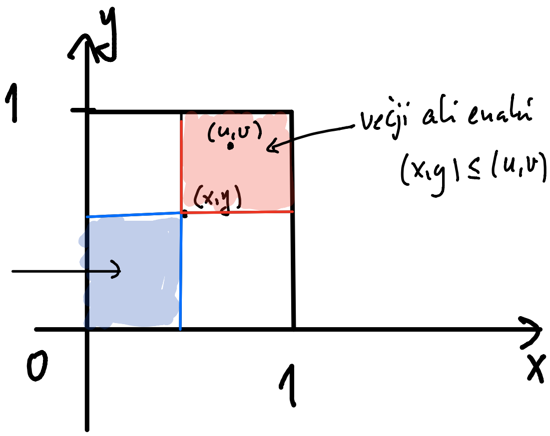
$$(x_1, y_1) \leq_{lex} (x_2, y_2) \iff \cancel{x_1 \leq x_2} \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \sqsubseteq y_2)$$

Obe sta delni.

Če sta $\leq$ in $\sqsubseteq$ linearni, je tudi $\leq_{lex}$ linearna.

<u>Primer</u>: $P = [0,1]$ z običajno $\leq$.
$Q = [0,1]$ z običajno $\leq$

Produktna $P \times Q = [0,1] \times [0,1]$

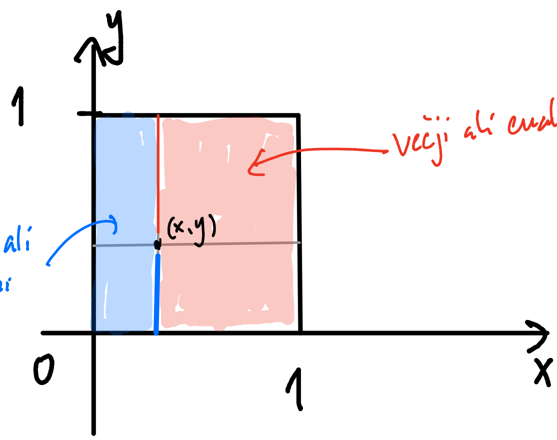


manjši ali enaki

večji ali enaki (x,y)

$(x,y) \le (u,v) \iff x \le u \wedge y \le v$

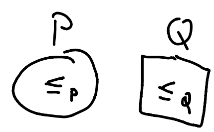
Leksikografska:



manjši ali enaki

večji ali enaki

Vsota:



$(P, \le_P)$ in $(Q, \le_Q)$ delni urejenosti

$(P+Q, \le_{P+Q})$ definiramo za $u, v \in P+Q$

$$u \le_{P+Q} v \iff (\exists x,y \in P.\ u = \iota_1(x) \wedge v = \iota_1(y) \wedge x \le_P y) \vee (\exists s,t \in Q.\ u = \iota_2(s) \wedge v = \iota_2(t) \wedge s \le_Q t)$$

$\iota_1(z) \le \iota_2(r)$?

$z \in P,\ r \in Q$

$$\iff (\exists x,y \in P.\ \overset{\perp}{\iota_1(z) = \iota_1(x) \wedge \overset{\perp}{\iota_2(r) = \iota_1(y)}} \wedge x \le_P y) \vee (\exists s,t \in Q.\ \underset{\perp}{\iota_1(z) = \iota_2(s)} \wedge \underset{\perp}{\iota_2(r) = \iota_2(t)} \wedge s \le_Q t) \iff \perp$$

Potenca: Naj bo $(P, \leq)$ delna in A množica.

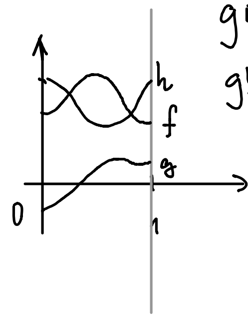
$(P^A, \sqsubseteq)$ kjer je za $f, g \in P^A$:

"g dominira f"

$$f \sqsubseteq g \iff \forall x \in A .\, f(x) \leq g(x)$$

Primer: $P = (\mathbb{R}, \leq)$, $A = [0,1]$ ← nehigienična izbira simbolov

$(\mathbb{R}^{[0,1]}, \sqsubseteq)$



$g \sqsubseteq f$

$g \sqsubseteq h$

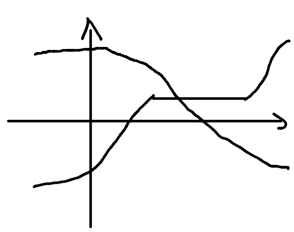
h in f nista primerljiva

Monotone preslikave:

Def: Preslikava $f : P \longrightarrow Q$ med delnima urejenostma $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$ je

- monotona: $\forall x, y \in P.\ x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y)$
- antitona: $\forall x, y \in P.\ x \leq_P y \Rightarrow f(y) \leq_Q f(x)$

Pozor: v analizi "monotona" pomeni "monotona ali antitona"
("dan" pomeni "dan ali noč")



Izrek: Identiteta je monotona. Kompozitum monotonih preslikav je monotona preslikava.

Meje:

Definicija: Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost, $S \subseteq P$ in $x \in P$:

- x je **spodnja meja** podmnožice S, ko velja $\forall\ y \in S\ .\ x \leq y$
- x je **zgornja meja** podmnožice S, ko velja $\forall\ y \in S\ .\ y \leq x$
- x je **infimum** ali **največja spodnja meja** ali **natančna spodnja meja** podmnožice S, ko je spodnja meja S in velja: za vse $y \in P$, če je y spodnja meja S, potem je $y \leq x$
- x je **supremum** ali **najmanjša zgornja meja** ali **natančna zgornja meja** podmnožice S, ko je zgornja meja S in velja: za vse $y \in P$, če je y zgornja meja S, potem je $x \leq y$
- x je **minimalni element** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall\ y \in S\ .\ y \leq x \Rightarrow x = y$
- x je **maksimalni element** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall\ y \in S\ .\ x \leq y \Rightarrow x = y$
- x je **najmanjši** ali **prvi** element ali **minimum** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall\ y \in S\ .\ x \leq y$
- x je **največji** ali **zadnji** element ali **maksimum** podmnožice S, ko velja $x \in S$ in $\forall\ y \in S\ .\ y \leq x$

Opozorilo: minimalni element ni isto kot minimum (in maksimalni element ni isto kot maksimum).

x je spodnja meja S
z je zgornja meja za S
t je supremum S