Ekvivalenčne relacije & kvocientne množice

<u>Def</u>: Relacija $R \subseteq A \times A$ je <u>ekvivalenčna relacija</u>, ko je refleksivna, tranzitivna in simetrična.
Ko velja xRy, pravimo, da sta x in y <u>ekvivalentna</u> (glede na R).

Običajno za ekvivalenčne relacije: $\approx, \triangleq, \sim, \simeq$

Opomba: "ekvivalentna relacija" ⟹ noob.
"x in y sta ekvivalenčna"

<u>Primeri</u>:

1. Enakost na A je ekvivalenčna relacija (diagonala $\Delta_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$).
   Je najmanjša ekvivalenčna relacija, ker vsaka ekvivalenčna relacija vsebuje diagonalo Δ_A.

2. Polna relacija je ekvivalenčna, $A \times A \subseteq A \times A$.
   Je največja ekvivalenčna relacija, ker vsebuje vse relacije na A.

3. Konkretni primeri:
   - vzporednost premic
   - skladnost trikotnikov
   - podobnost trikotnikov

<u>Def</u>: Naj bo $f: A \to B$ preslikava. Relacija $\sim_f$ na A (<u>inducirana</u> ali <u>porojena</u> z f):

$$x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$$

$\sim_f$ je ekvivalenčna:

(1) refleksivnost: $x \sim_f x \iff f(x) = f(x)$ ✓

(2) tranzitivnost:

$$x \sim_f y \wedge y \sim_f z \iff$$
$$f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow$$
$$f(x) = f(z) \iff$$
$$x \sim_f z$$

(3) simetrična: $x \sim_f y \iff f(x) = f(y) \iff f(y) = f(x) \iff y \sim_f x$.

Ekvivalenčni razredi in kvocientne množice

<u>Def</u>: Naj bo $E \subseteq A \times A$ ekvivalenčna relacija.
<u>Ekvivalenčni razred</u> elementa $x \in A$ je $[x]_E := \{ y \in A \mid x E y \}$.

(Opomba: filozofi so krivi, da se reče "razred" in ne "množica", čeprav $[x]_E$ je množica.)

<u>Def</u>: Naj bo $E \subseteq A \times A$ ekvivalenčna rel.
<u>Kvocientna množica</u> ali <u>kvocient</u> A/E je množica vseh ekvivalenčnih razredov:

$$A/E := \{ [x]_E \mid x \in A \}$$
$$= \{ \xi \in P(A) \mid \exists x \in A.\ \xi = [x]_E \}.$$

<u>Kanonična kvocientna preslikava</u> $q_E : A \longrightarrow A/E$

$$q_E : x \longmapsto [x]_E.$$

Primer: Na $\mathbb{N}$ definiramo $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$n E m \iff 3 \mid (n-m) \iff \exists k \in \mathbb{N}.\ 3k = n-m$$

"n in m imata enak ostanek pri deljenju s 3"

$$[8]_E = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$$

$$\mathbb{N}/_E = \{\{0,3,6,9,\dots\}, \{1,4,7,10,\dots\}, \{2,5,8,11,\dots\}\}$$

Izrek: Vsaka ekvivalenčna relacija je porojena z neko preslikavo.

Dokaz: $E \subseteq A \times A$ je porojena s kanonično kvocientno preslikavo q_E, ker velja

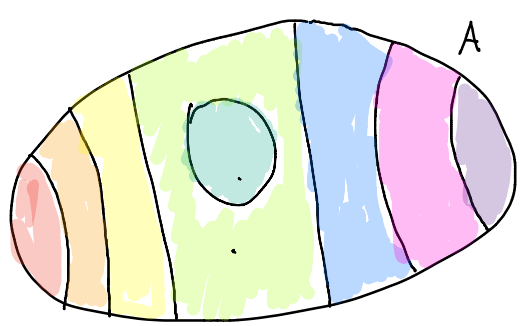
$$x E y \iff [x]_E = [y]_E \iff q_E(x) = q_E(y).$$ ∎

Razdelitev množice

Def: Razdelitev ali particija množice A je množica nepraznih in paroma disjunktnih množic, ki tvorijo pokritje A.

S simboli: Razdelitev $S \subseteq P(A)$, da velja

1. $\forall U \in S.\ U \neq \emptyset$
2. $\forall U, V \in S.\ U \neq V \Rightarrow U \cap V = \emptyset$
3. $\bigcup_{U \in S} U = A$



Primer: Navpične premice tvorijo razdelitev ravnine.

Izrek: Ekvivalenčni razredi tvorijo razdelitev.

Dokaz. (smo povedali v lepi slovenščini)

Def: Naj bo S razdelitev množice A. Definiramo relacijo $\sim_S$ na A:

$$x \sim_S y \iff \exists U \in S \,.\, x \in U \wedge y \in U$$

Tedaj je $\sim_S$ ekvivalenca in ekvivalenčni razredi $\sim_S$ so natanko elementi S.

Primer:

Razdelimo $\mathbb{N}$ na množice $\{0\}$, $\{1,2\}$, $\{3,4,5\}$, $\{n \mid n \geq 6\}$

0 | 1 2 | 3 4 5 | 6 7 …

Izbor predstavnikov:

$m \sim n \iff 3 \mid (m-n)$ $\sim$ na $\mathbb{N}$

Razdelitev na ekvivalenčne razrede:

$\{0,3,6,9,\dots\}$

$\{1,4,7,10,\dots\}$

$\{2,5,8,11,\dots\}$

Izbor predstavnikov:

$9 \in \{0,3,6,9,\dots\}$

$100 \in \{1,4,7,10,\dots\}$

$5 \in \{2,5,8,11,\dots\}$

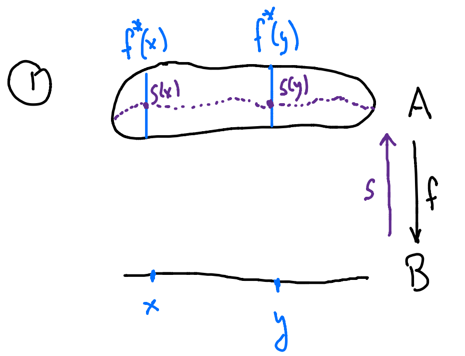
$C = \{9,100,5\}$

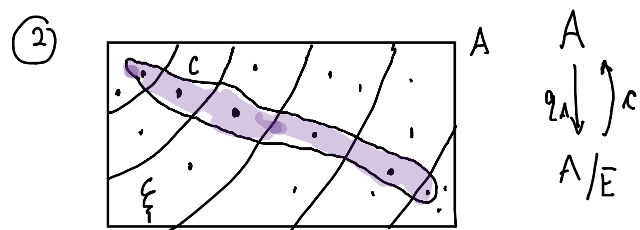
$C = \{0,1,2\}$

Def: Naj bo $E \subseteq A \times A$ ekvivalenca. Izbor predstavnikov za relacijo E je $C \subseteq A$, ki vsebuje natanko en element iz vsakega ekvivalenčnega razreda za E.

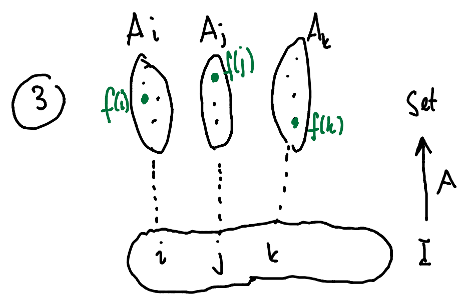
Izrek: Naslednje izjave so ekvivalentne.

1. Vsaka surjektivna preslikava ima desni inverz (prerez).
2. Vsaka ekvivalenčna relacija ima izbor predstavnikov.
3. Vsaka družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.
4. Produkt družine nepraznih množic je neprazen.

1) 

2) 

$c(\xi) =$ tisti $x \in \xi \cap C$.

3) 

$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ in $\forall i \in I.\, f(i) \in A_i$

Aksiom izbire:

Vsaka družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.

Univerzalna lastnost kvocientne množice

Pogosto želimo definirati

$$f : A/_E \longrightarrow B$$

Naivno:

$$\begin{array}{ccc} f : [x]_E & \longmapsto & e(x) \\ \shortparallel & & \shortparallel ? \\ [x']_E & \longmapsto & e(x') \end{array}$$

paziti moramo, da vrednost $e(x)$ ni odvisna od izbire x!

Izrek: Naj bo E ekv. rel. na A in $g : A \to B$ skladna z E, kar pomeni da g slika ekvivalentne elemente v enake: $\forall x, y \in A.\ x E y \Rightarrow g(x) = g(y)$.
Tedaj obstaja natanko ena preslikava $f : A/E \to B$, da velja $f([x]_E) = g(x)$ za vse $x \in A$. Drugače povedano: $f \circ q_E = g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "q_E"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A/_E \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Dokaz: Denimo da imamo $f_1, f_2 : A/_E \to B$ in velja $f_1 \circ q_E = g$ in $f_2 \circ q_E = g$.
Tedaj sta f_1 in f_2 enaka, ker:

$$f_1 \circ q_E = g = f_2 \circ q_E \xRightarrow[q_E \text{ epi}]{} f_1 = f_2$$

Preslikava f obstaja: $f : A/_E \longrightarrow B$ podamo s funkcijsko relacijo

$$f(\xi) = y \iff \underbrace{\exists x \in A.\ \xi = [x]_E \wedge g(x) = y}_{\xi R y}$$

Preverimo, da je relacija $R \subseteq A/_E \times B$ funkcijska:

1) Enoličnost:

če $\xi R y$ in $\xi R z$:

$\exists x \in A.\ \xi = [x]_E \wedge g(x) = y$ in $\exists x' \in A.\ \xi = [x']_E$ in $g(x') = z$

Imamo: $x \in A$, $\xi = [x_E]$, $g(x) = y$, $x' \in A$, $\xi = [x']_E$, $g(x') = z$:

$$y = g(x) = g(x') = z$$

velja ker $[x]_E = \xi = [x']_E$ torej $x E x'$ in g je skladna z E

2) Celovitost:

Naj bo $\xi \in A/E$, iščemo $y \in B$, da velja $\xi R y$:

ξ ni prazen, torej obstaja $x' \in \xi$, tore $\xi = [x']$:

Vzemimo $y := g(x')$. Tedaj velja $\xi R y$:

$$\exists x \in A.\ \xi = [x]_E \wedge g(x) = y \quad ?$$

$$\xi = [x']_E \wedge g(x') = g(x')$$

$\blacksquare$