Relacije

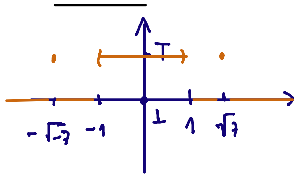
Predikati

- Predikat kot formula $\varphi(x)$ za spremenljivko $x \in A$.

  Primer: $x^2 < 1 \vee x^2 = 7$ $(x \in \mathbb{R})$

- Predikat kot funkcija iz domene v $2 = \{\perp, \top\}$

  Primer: $\mathbb{R} \longrightarrow 2$

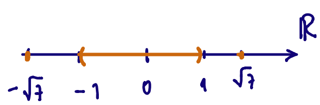


$$x \longmapsto \begin{cases} \top & \text{če } x^2 < 1 \vee x^2 = 7 \\ \perp & \text{sicer} \end{cases}$$

$$2^{\mathbb{R}} \cong \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

- Predikat kot podmnožica:

  Primer: $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 1 \vee x^2 = 7\} \subseteq \mathbb{R}$



Relacije ali večmestni predikati

<u>Def</u>: <u>Relacija</u> R na množicah $A_1, A_2, \dots, A_n$ je predikat na kartezičnem produktu $A_1 \times \dots \times A_n$, se pravi podmnožica $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

Pravimo ji tudi <u>n-mestni predikat</u> ali <u>n-člena relacija</u>

Množice $A_1, \dots, A_n$ tvorijo <u>domeno</u> relacije R.

Relacijo lahko predstavimo tudi kot preslikavo

$$R: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \longrightarrow 2$$

<u>Primer</u>:

- predikat $Q \subseteq A$ je 1-člena relacija na A.
- relacija $\leq$ na $\mathbb{Z}$ je 2-člena relacija (dvomestna)

$$(\leq) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- kolinearnost : trojiška relacija med točkami v ravnini
- konkurentnost: "premice p, q in r se sekajo v isti točki"

<u>Oznaka</u>: $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$

$(x_1, \dots, x_n) \in R$ $\qquad$ $x_1, \dots, x_n$ so v relaciji R

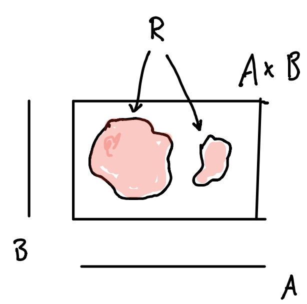
pišemo tudi: $R(x_1, \dots, x_n)$

Za dvočlene relacije $R \subseteq A \times B$:

$(x, y) \in R$	$(\sqrt{7}, 3) \in \leq$
$R(x, y)$	$\leq(\sqrt{7}, 3)$
$x R y$	$\sqrt{7} \leq 3$ $\leftarrow$ običajno

Za dvočleno relacijo:

$$R \subseteq \underset{\text{domena}}{A} \times \underset{\text{kodomena}}{B}$$

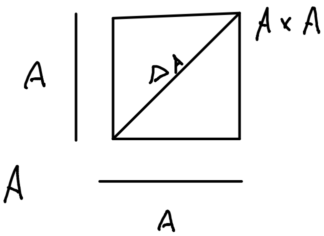


Na množici A lahko definiramo:

1) <u>Prazna relacija</u>: $\emptyset \subseteq A \times A$

2) <u>Polna relacija</u>: $A \times A \subseteq A \times A$

3) <u>Diagonala</u> ali <u>enakost</u>:



$$\Delta_A = \{(x,x) \mid x \in A\} \subseteq A \times A$$
$$= \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\} \subseteq A \times A$$

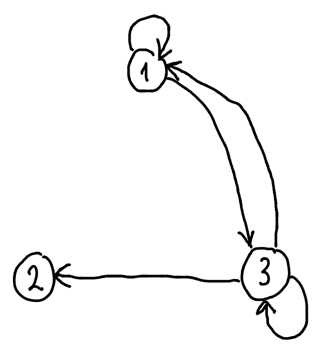
Relacijo na končni množici lahko podamo na več načinov:

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad$ $R \subseteq A \times A$

s tabelo

x	y	$R(x,y)$
1	1	$\top$
1	2	$\bot$
1	3	$\top$
2	1	$\bot$
2	2	$\bot$
2	3	$\bot$
3	1	$\top$
3	2	$\top$
3	3	$\top$

z usmerjenim grafom



Osnovne lastnosti relacij

Relacije, ki so pomembne v matematični praksi imajo pogosto lastnosti, ki jih poimenujemo. Za relacijo $R \subseteq A \times A$ pravimo da je:

$(\forall x \in \emptyset . \top) \Leftrightarrow \top$

- **refleksivna:** $\forall\ x \in A\ .\ x\ R\ x$
- **simetrična:** $\forall\ x,\ y \in A\ .\ x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$
- **antisimetrična:** $\forall\ x,\ y \in A\ .\ x\ R\ y \wedge y\ R\ x \Rightarrow x = y$
- **tranzitivna:** $\forall\ x,\ y,\ z \in A\ .\ x\ R\ y \wedge y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$
- **irefleksivna:** $\forall\ x \in A\ .\ \neg\ (x\ R\ x)$
- **asimetrična:** $\forall\ x\ y \in A\ .\ x\ R\ y \Rightarrow \neg\ (y\ R\ x)$
- **sovisna:** $\forall\ x\ y \in A\ .\ x \neq y \Rightarrow x\ R\ y \vee y\ R\ x$
- **strogo sovisna:** $\forall\ x\ y \in A\ .\ x\ R\ y \vee y\ R\ x$

Primeri:

antisimetrična ✓: $\forall x, y \in \mathbb{N} .\ x < y \wedge y < x \Rightarrow x = y$

$\forall x, y \in \mathbb{N} .\ \bot \Rightarrow x = y$

$\forall x, y \in \mathbb{N} .\ \top$

$\top$

1) Relacija $<$ na $\mathbb{N}$: ni refleksivna, irefleksivna, asimetrična, sovisna

2) Relacija $\leq$ na $\mathbb{N}$: refleksivna, ni irefleksivna, strogo sovisna

3) Relacija $|$ na $\mathbb{N}$ $(a | b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} .\ ak = b)$ ni sovisna, ni strogo sovisna

ni strogo sovisna: $3 \nmid 7$ in $7 \nmid 3$

4) Relacija $\subseteq$ na $P(\mathbb{R})$

5) $\emptyset$ na $\mathbb{N}$

6) polna relacija na $\mathbb{N}$

Premisli: kako iz usmerjenega grafa razberemo lastnosti relacije?

Operacije na relacijah

$R \subseteq A \times B$ in $S \subseteq A \times B$:

- unija $R \cup S \subseteq A \times B$: $x(R \cup S)y \Leftrightarrow xRy \vee xSy$
- presek $R \cap S \subseteq A \times B$: $x(R \cap S)y \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$
- komplement R:

$$x R^c y \Leftrightarrow \neg(xRy)$$

$$x \not R y$$

$a \mid b$ a deli b

$a \nmid b$ a ne deli b

$a \neq b$

$a \not\subset b$

Primer: $<$ na $\mathbb{R}$

$$(<) \cup (>) = (\neq)$$

Transponirana relacija:

$R \subseteq A \times B$

transponiranka $R^T \subseteq B \times A$

$$y R^T x \Leftrightarrow x R y$$

Primer:

$<^T$ je $>$

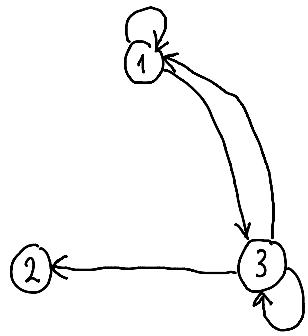
$R = R^T \Leftrightarrow R$ je simetrična

$\geq^T$ je $\leq$

$=^T$ je $=$

Relacija kot tabela (matrika)

$\top = 1$
$\bot = 0$



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kompozitum relacij:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "S \circ R"'] & B \arrow[r, "S"] & C \end{tikzcd}$$

$$R \subseteq A \times B \qquad S \subseteq B \times C$$

Definiramo $S \circ R \subseteq A \times C$

$$x \,(S \circ R)\, z \iff \exists y \in B .\ x R y \wedge y S z$$

$$S \circ R := \{ (x,z) \in A \times C \mid \exists y \in B .\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S \}$$

Izrek:

1. Kompozitum relacij je asociativen:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "S \circ R"'] \arrow[rrr, bend left=60, "(T \circ S) \circ R"] \arrow[rrr, bend right=60, "T \circ (S \circ R)"'] & B \arrow[r, "S"] \arrow[rr, bend left, "T \circ S"] & C \arrow[r, "T"] & D \end{tikzcd}$$

2. Diagonala je enota za kompozicijo relacij:

$$R \subseteq A \times B$$

$$\Delta_B \circ R = R \quad \text{in} \quad R \circ \Delta_A = R .$$

n-ta potenca relacije $R \subseteq A \times A$ je

$$R^n := \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n}$$

$R^0 = \Delta_A$

$R^1 = R$

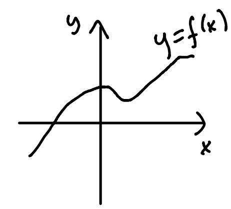
$R^2 = R \circ R$

Funkcijske relacije:

Def: Naj bo $f : A \to B$ funkcija.
Graf funkcije f je relacija $\Gamma_f \subseteq A \times B$, podana s

$$x \, \Gamma_f \, y \iff f(x) = y$$

$$\Gamma_f := \{ (x,y) \in A \times B \mid f(x) = y \}$$



Def: Relacija $R \subseteq A \times B$ je funkcijska relacija, če je

1) celovita: $\forall x \in A \, \exists y \in B . \, x R y$
2) enolična: $\forall x \in A . \forall y_1, y_2 \in B . \; x R y_1 \wedge x R y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

celovita & enolična $\iff \forall x \in A \, \exists! y \in B . \, x R y$

Izrek: Graf funkcije je funkcijska relacija.

Dokaz. $f : A \to B$

Dokazujemo: Γ_f funkcijska $\iff$

$\forall x \in A . \exists! y \in B . \; x \Gamma_f y \iff$

$\forall x \in A . \exists! y \in B . \; f(x) = y$

Izrek: Vsaka funkcijska relacija določa funkcijo.

Dokaz: Denimo, da je $R \subseteq A \times B$ funkcijska, se pravi:

$$\forall x \in A .\ \exists! y \in B .\ x R y$$

Definiramo funkcijo $f_R : A \to B$ s predpisom

$$f_R : x \longmapsto \text{tisti } y \in B, \text{ za katerega velja } x R y .$$

$$\underbrace{\iota y \in B .\ x R y}_{\text{splošni zapis}}$$

" $\iota x \in A .\ \varphi(x)$ " (x vezana)

" tisti $x \in A$, za katerega velja $\varphi(x)$"

zapis veljaven, če velja $\exists! x \in A . \varphi(x)$

Primer:

$$\iota x \in \mathbb{R} . (x+3=3) = 0$$

$$\iota x \in \mathbb{R} . (x^3 = 2) = \sqrt[3]{2}$$

$$\ln x := (\iota y \in \mathbb{R} .\ e^y = x)$$

$\iota x \in \mathbb{R} .\ (x^2 = 2)$ neveljaven zapis

$\iota x \in \mathbb{R} .\ (x = x+2)$ neveljaven zapis

Sklep:

$$B^A \cong \underset{R \in P(A \times B)}{\{ R \subseteq A \times B \mid R \text{ funkcijska relacija} \}}$$

$$f \longmapsto \Gamma_f$$

$$f_R \longleftarrow R$$