Lastnosti preslikav

Osnovne lastnosti preslikav

Definicija: Preslikava `f : A → B` je

- **injektivna**, ko velja `∀ x y ∈ A . f(x) = f(y) ⇒ x = y`
- **surjektivna**, ko velja `∀ y ∈ B . ∃ x ∈ A . f(x) = y`
- **bijektivna**, ko je surjektivna in injektivna

Naloga: primerjaj definicijo injektivnosti z zahtevo, da mora biti biti enolično prirejanje, ki določa preslikavo, enolično.

Naloga: primerjaj definicijo surjektivnost z zahtevo, da mora biti celovito prirejanje, ki določa preslikavo.

Definicija: Preslikava `f : A → B` je

- **monomorfizem (mono)**, ko jo lahko krajšamo na levi: `∀ C ∈ Set ∀ g, h : C → A . f ∘ g = f ∘ h ⇒ g = h`

- **epimorfizem* (epi)**, ko jo lahko krajšamo na desni: `∀ C ∈ Set ∀ g, h : B → C . g ∘ f = h ∘ f ⇒ g = h`

Izrek 1: Naj bosta `f : A → B` in `g : B → C` preslikavi.

1. Kompozicija monomorfizmov je monomorfizem.
2. Kompozicija epimorfizmom je epimorfizem.
3. Če je `g ∘ f` monomorfizem, je `f` monomorfizem.
4. Če je `g ∘ f` epimorfizem, je `g` epimorfizem.

Dokaz:

1. Naj bosta `f : A → B` in `g : B → C` monomorfizma. Dokazujemo, da je `g ∘ f` tudi monomorfizem. Naj bosta `h, k : D → A` preslikavi, za kateri velja `(g ∘ f) ∘ h = (g ∘ f) ∘ k`. Dokazujemo `h = k`. Ker je kompozicija preslikav asociativna, velja `g ∘ (f ∘ h) = (g ∘ f) ∘ h = (g ∘ f) ∘ k g ∘ (f ∘ k)`. Ker je `g` monomorfizem, ga smemo krajšati na levi, torej dobimo `f ∘ h = f ∘ k`. Ker je `f` monomorfizem, ga smemo krajšati in dobimo želeno enakost `h = k`.

2. Dokaz je podoben 1, le vloga leve in desne strani se spremeni (vaja).

3. Dokaz je podoben 4, le vloga leve in desne strani se spremeni (vaja).

4. Naj bosta `f : A → B` in `g : B → C` preslikavi in `g ∘ f` epimorfizem. Dokazujemo, da je `g` epimorfizem. Naj bosta `h, k : C → D` taki preslikavi, da velja `h ∘ g = k ∘ g`. Dokazujemo, da je `h = k`. Iz `h ∘ g = k ∘ h` sledi `(h ∘ g) ∘ f = (k ∘ g) ∘ f`. Če upoštevamo asociativnost kompozicije, dobimo `h ∘ (g ∘ f) = k ∘ (g ∘ f)`. Ker je `g ∘ f` epimorfizem, ga smemo krajšati na desni, od koder dobimo želeno enakost `h = k`. □

Izrek 2: Za preslikavo `f : A → B` velja

1. `f` je monomorfizem ⇔ `f` je injektivna
2. `f` je epimorfizem ⇔ `f` je surjektivna

3. f je izomorfizem ⇔ f je bijektivna

Dokaz:

1. Če je f monomorfizem in $f(x) = f(y)$, tedaj je $(f \circ (u \mapsto x))\ () = f(x) = f(y) = (f \circ (u \mapsto y))\ ()$, torej $(u \mapsto x) = (u \mapsto y)$ torej $x = y$.

   Če je f injektivna in $f \circ g = f \circ h$, potem je za vsak x $f(g(x)) = f(h(x))$, torej $g(x) = h(x)$ za vsak x, torej $g = h$.

2. Če je f epimorfizem: obravnavajmo množico

   $S = \{ z \in B \mid \exists\ x \in A\ .\ f(x) = z \}$

   ter preslikavi $\chi\_S : B \to 2$ in $(y \mapsto \top) : B \to 2$. Ker velja $\chi\_S \circ f = (y \mapsto \top) \circ f$, sledi $\chi\_S = (y \mapsto \top)$, torej $S = B$, kar je surjektivnost.

   Če je f surjektivna in $g \circ f = h \circ f$: naj bo $y \in B$. Obstaja $x \in A$, da je $f(x) = y$. Torej je

   $g(y) = g(f(x)) = h(f(x)) = h(y).$

   Torej je $g = h$.

3. Če je f izomorfizem, potem

   - f je epi, ker je $id\_B = f \circ f^{-1}$ epi
   - f je mono, ker je $id\_A = f^{-1} \circ f$ mono

   Če je f bijektivna, potem je njen inverz f^{-1} definiran s predpisom

   $f(y) = \iota\ x \in A\ .\ f(x) = y$ "tisti x, ki ga f slika v y"

   Dokazati je treba $\exists!\ x\ .\ f(x) = y$:

   - $\exists\ x\ .\ f(x) = y$ je surjektivnost f
   - $\forall\ x_1\ x_2\ .\ f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \Rightarrow x_1 = x_2$ sledi iz injektivnosti f □

Definicija: Če sta $f : A \to B$ in $g : B \to A$ taki preslikava, da velja $f \circ g = id\_B$, pravimo:

- f je **levi** inverz g
- g je **desni** inverz f
- g je **prerez** preslikave f
- f je **retrakcija** iz B na A

Opomba: retrakcija in prerez *ni* isto kot izomorfizem!

Izrek 3: Retrakcija je epimorfizem, prerez je monomorfizem.

Dokaz:

Denimo, da velja $f \circ g = id$, torej je f retrakcija in g prerez. Ker je id monomorfizem, je po izreku 1 tudi g monomorfizem. In ker je id epimorfizem, je po istem izreku f monomorfizem. □

Slike in praslike

Naj bo $f : A \to B$ preslikava. Tedaj definiramo **izpeljano množico**

$$\{ f(x) \mid x \in A \} := \{ y \in B \mid \exists\, x \in A \,.\, y = f(x) \}$$

ter **izpeljano množico s pogojem**

$$\{ f(x) \mid x \in A \mid \varphi(x) \} := \{ y \in B \mid \exists\, x \in A \,.\, \varphi(x) \land y = f(x) \}$$

Običajno se piše izpeljano množico s pogojem kar

$$\{ f(x) \mid x \in A \land \varphi(x) \}$$

Primer: Množica vseh kvadratov naravnih števil je izpeljana množica $\{ n^2 \mid n \in N \}$.

Definicija: Naj bo $f : A \to B$ preslikava:

1. **Praslika** podmnožice $S \subseteq B$ je $f^*(S) := \{ x \in A \mid f(x) \in S \}$.
2. **Slika** podmnožice $T \subseteq A$ je $f_*(T) := \{ y \in B \mid \exists\, x \in A \,.\, f(x) = y \}$.

Kot vidimo, lahko sliko zapišemo tudi kot izpeljano množico

$$f_*(T) := \{ f(x) \mid x \in T \}$$

Zaloga vrednosti je slika domene, torej $f_*(B)$.

Praslika f je preslikava $f^* : P(B) \to P(A)$.

Slika je preslikava $f_* : P(A) \to P(B)$.

Torej sta ^* in _* funkcionala višjega reda:

$$^* : B^A \to P(A)^{P(B)}$$
$$_* : B^A \to P(B)^{P(A)}$$

Naj bo $f : A \to B$ preslikava:

- praslike so monotone: če je $S \subseteq T \subseteq A$, potem je $f_*(S) \subseteq f_*(T)$
- slike so monotone: če je $X \subseteq Y \subseteq B$, potem je $f^*(X) \subseteq f^*(Y)$.

Izrek 4: Naj bo $f : A \to B$ in $S : I \to P(B)$. Tedaj je

- $f^* (\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{i \in I} f^*(S_i)$
- $f^* (\bigcap_{i \in I} S_i) = \bigcap_{i \in I} f^*(S_i)$

Dokaz:

Dokažimo prvo izjavo, druga je zelo podobna, le da $\exists$ zamenjamo z $\forall$.

Dokazujemo $f^* (\bigcup_{i \in I} S_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} f^*(S_i)$. Naj bo $x \in f^* (\bigcup_{i \in I} S_i)$ in dokazujemo $x \in \bigcup_{j \in I} f^*(S_j)$. Ker je $f\ x \in \bigcup_{i \in I} S_i$ obstaja $k \in I$, da je $f\ x \in S_k$, torej je $x \in f^*\ S_k \subseteq \bigcup_{i \in I} f^*(S_i)$. □

Izrek 5: Naj bo $f : A \to B$ in $T : I \to P(A)$. Tedaj je

- $f_* (\bigcup_{i \in I} T_i = \bigcup_{i \in I} f_*(T_i)$.
- $f_* (\bigcap_{i \in I} T_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f_*(S_i)$.

Torej velja tudi:

- $f^*(\varnothing) = \varnothing$
- $f_*(\varnothing) = \varnothing$
- $f^*(B) = A$
- $f^*(S \cup T) = f^*(S) \cup f^*(T)$
- $f^*(S \cap T) = f^*(S) \cap f^*(T)$

Poleg tega imamo za $S \subseteq B$

$f^*(S^c) = (f^*(S))^c$.