# Množice in razredi

$\{x \mid \varphi(x)\}$ razred vseh $x$-ov, ki zadoščajo $\varphi(x)$.

Množice in razredi so "zbirke", razredi so zbirke, ki so "prevelike", da bi bile elementi zbirk.

Pravilo: razred ne more biti element.

$$\text{"}\underset{\text{razred}}{R} \in \underset{\text{množica}}{S}\text{"}$$ je neveljavna izjava

Konstrukcije in pojme lahko iz množic prenesemo na razrede:

Razred: $\{x \mid \varphi(x)\}$

ni omejitve za $x$

Podmnožica: $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$

$x$ je iz $A$

Kartezični produkt razredov:

$$C \times D = \{z \mid \exists x \in C.\ \exists y \in D.\ (x,y) = z\}$$

<u>Def</u>: Vsaka množica je tudi razred, namreč če je $S$ množica, je hkrati tudi razred $\{x \mid x \in S\}$.

Razred, ki ni množica, se imenuje <u>pravi razred</u>.

Primeri pravih razredov:

- Russellov razred $R = \{S \mid S \notin S\}$ ✓

- $\{x \mid x=0 \lor x=1\}$ razred, enak množici $\{0,1\}$, ni pravi
- Razred vseh množic $\mathrm{Set} = \{S \mid S \text{ je množica}\}$ je pravi

  Zakaj? Če bi bil Set množica, bi lahko tvorili podmnožico $\{S \in \mathrm{Set} \mid S \notin S\} = R$ in bi bil Russellov razred množica, kar vodi v protislovje ($R \in R$ in $R \notin R$).

- $E = \{x \mid \exists y \in \mathrm{Set}.\, x = \{y\}\}$ razred vseh enojcev (množic z enim elementom)

  pravi razred:

  Če bi bil $E$ množica, potem bi bila množica unija $E$:

$$\bigcup_{S \in E} S = \mathrm{Set}$$

  premisli sam!

- Razred vseh vektorskih prostorov, vseh grup, vseh končnih grup — pravi razredi

## Družine množic

$$A : I \longrightarrow \mathrm{Set}$$

indeksna množica

za vsak indeks $i \in I$, imamo množico $A_i$

(pravimo tudi <u>indeksirana družina</u>)

Druge oznake:

$$(A_i)_{i \in I}$$

$$\{A_i\}_{i \in I}$$

$$\{A_i \mid i \in I\}$$

Izraz "družina" se včasih uporablja kot sinonim za "množica množic"

$X^{\{0,1\}} \cong X \times X$

Primeri:

1) $I = \{0,1\}$ $\quad A : \{0,1\} \to \mathrm{Set}$

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \mathbb{R} \\ A_1 &= \{42\} \end{aligned}\right\}$$

$\{\mathbb{R}, \{42\}\}$ .... to ni isto kot $A$.

2) Konstantna družina: $\quad A : \{0,1,2\} \to \mathrm{Set}$

$$A_0 = A_1 = A_2$$

3) Prazna družina: družina, indeksirana s prazno množico

$$\emptyset \to \mathrm{Set}$$

4) Družina praznih:

$A : I \to \mathrm{Set}$ da je $A_i = \emptyset$ za vse $i \in I$.

# Unije in preseki družin

$A : I \to \mathrm{Set}$ družina množic

Unija družine $A$:

$$\bigcup A := \{x \mid \exists i \in I.\ x \in A_i\}$$

Pišemo tudi: $\bigcup_{i \in I} A_i$

$\boxed{\text{Aksiom o uniji: Unije družine množic je množica.}}$

Presek družine $A$:

$$\bigcap A := \{ x \mid \forall i \in I.\ x \in A_i \}$$

Pišemo tudi $\bigcap_{i \in I} A_i$

Ideja: $\bigcap A$ je množica, ki je podmnožica $\bigcup A$.

Preverimo: $\bigcap A \subseteq \bigcup A$

Naj bo $x \in \bigcap A$, se pravi $\forall i \in I.\ x \in A_i$.

Dokažemo $x \in \bigcup A$, se pravi $\exists j \in I.\ x \in A_j$.

Težava: kaj pa, če je $I = \emptyset$ ?!

$\boxed{\text{Premisli: Ali iz } \forall x \in S.\varphi(x) \text{ sledi } \exists x \in S.\varphi(x) \text{ ?}}$

Presek in unija prazne družine, družine praznih:

- $A : \emptyset \to \mathrm{Set}$

$$\bigcup A = \{ x \mid \underbrace{\exists i \in \emptyset.\ x \in A_i} \} = \{ x \mid \bot \} = \emptyset$$

$$\bigcap A = \{ x \mid \forall i \in \emptyset.\ x \in A_i \} = \{ x \mid \top \} = \mathrm{Set}$$

- $A : I \to \mathrm{Set}$, $A_i = \emptyset$

$$\bigcup A = \{ x \mid \exists i \in I.\ x \in \emptyset \} =$$
$$= \{ x \mid \exists i \in I.\ \bot \} = \{ x \mid \bot \} = \emptyset$$

$\bigcap A = \{ x \mid \forall i \in I.\ \bot \}$ = dva primera:

1. $I = \emptyset$: $\bigcap A = \mathrm{Set}$ (glej zgoraj)
2. $I \neq \emptyset$: $\bigcap A = \{ x \mid \forall i \in I.\ \bot \} = \{ x \mid \bot \} = \emptyset$.

Sklep: 1) $\bigcap A$ je množica, če je $A: I \to Set$ in $I \neq \emptyset$.
(ker je podmnožica $\bigcup A$.)

2) $\bigcap A = Set$ pravi razred, če $A: I \to Set$, $I = \emptyset$.

# Lastnosti preslikav

Definicija: Preslikava $f: A \to B$ je

- injektivna ko velja $\forall x, y \in A.\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- surjektivna : $\forall y \in B.\ \exists x \in A.\ f(x) = y$
- bijektivna : injektivna & surjektivna

Ekvivalentna definicija injektivnosti: $\forall x, y \in A.\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Spomnimo se: prirejanje $\varphi(x,y)$ "x-u priredimo y" je enolično, če

$$\forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B.\ \varphi(x,y_1) \wedge \varphi(x,y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$$

V primeru $\varphi(x,y) \Leftrightarrow f(x) = y$:

$$\forall x \in A.\ \forall y_1, y_2 \in B.\ f(x) = y_1 \wedge f(x) = y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

To seveda ni injektivnost $f$!

$\cancel{3} + x^2 = \cancel{3} + x^2 \cdot x$

$\emptyset \cdot x^2 = 0 \cdot x$

**Definicija:** $f : A \to B$ je

- **monomorfizem** (**mono**), ko ga smemo krajšati na levi:

$$\forall C \in \mathrm{Set}.\ \forall g,h : C \to A.\ (f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$$

- **epimorfizem** (**epi**), ko ga smemo krajšati na desni:

$$\forall C \in \mathrm{Set}.\ \forall g,h.\ B \to C.\ (g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h)$$

$$C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \qquad \text{mono}$$

$$A \xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C \qquad \text{epi}$$

**Izrek:**

(1) Kompozicija monomorfizmov je monomorfizem.
(2) Kompozicija epimorfizmov je epimorfizem.
(3) Če je $g \circ f$ mono, potem je $f$ mono. $\quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
(4) Če je $g \circ f$ epi, potem je $g$ epi.

**Dokaz:**

(1) Oris:

$$(f_1 \circ f_2) \circ g = (f_1 \circ f_2) \circ h \quad \Leftrightarrow$$

$$\cancel{f_1} \circ (f_2 \circ g) = \cancel{f_1} \circ (f_2 \circ h) \qquad \text{krajšamo: } f_1 \text{ mono}$$

$$\cancel{f_2} \circ g = \cancel{f_2} \circ h \qquad \text{krajšamo: } f_2 \text{ mono}$$

$$g = h$$

**Izrek:** Za preslikavo $f : A \to B$ velja

(1) $f$ mono $\Leftrightarrow$ $f$ injektivna

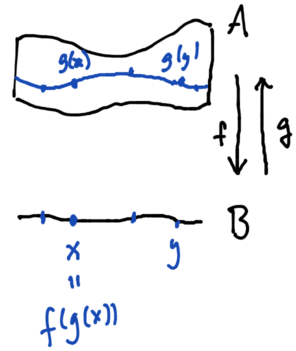
(2) $f$ epi $\Leftrightarrow$ $f$ surjektivna

(3) $f$ izomorfizem $\Leftrightarrow$ $f$ bijektivna.

Dokaz: zapiski.

**Definicija:** Če sta $f : A \to B$ in $g : B \to A$ taki preslikavi, da velja $f \circ g = id_B$, pravimo:

- $f$ je levi inverz $g$
- $g$ je desni inverz $f$
- $g$ je prerez $f$
- $f$ je retrakcija iz $A$ na $B$




Opomba: retrakcija & prerez $\neq$ izomorfizem!!

**Izrek:** Retrakcija je epi, prerez je mono.

# Slike & praslike

Naj bo $f : A \to B$:

- Praslika ali inverzna slika $S \subseteq B$ je množica $f^*(S) := \{x \in A \mid f(x) \in S\}$
- Slika ali direktna slika $T \subseteq A$ je množica $f_*(T) := \{y \in B \mid \exists x \in T. fx = y\}$