Podmnožice in potenčne množice

Definicija relacije ⊆

Pravimo, da je množica S **podmnožica** množice T, pišemo $S \subseteq T$, ko velja $\forall x \in S . x \in T$. Pravimo tudi, da je S **vsebovana** v T in da je T **nadmnožica** S.

Vedno velja $\emptyset \subseteq S$ in $S \subseteq S$.

Princip ekstenzionalnosti za množice pravi:

$$S = T \Leftrightarrow (\forall x \in S . S \in T) \land (\forall y \in T . y \in S)$$

kar lahko zapišemo s podmnožicami:

$$S = T \Leftrightarrow S \subseteq T \land T \subseteq S$$

Vsaka podmnožica $S \subseteq A$ opredeljuje neko lastnost elementov iz A: tisti elementi, ki imajo opredeljeno lasnost, so v S, ostali pa ne.

Primer: naj bo P množica vseh praštevil, torej je $P \subseteq N$. Podmnožica P opredeljuje lasnost "je praštevilo".

Kako tvorimo podmnožice

Če je $\varphi(x)$ logična formula, v kateri nastopa spremenljivka $x \in A$, lahko tvorimo množico

$$\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$$

Pri tem je x vezana spremenljivka. Za to množico velja:

$$a \in \{ x \in A \mid \varphi(x) \} \Leftrightarrow a \in A \land \varphi(a)$$

Povedano z besedami: elementi množice $\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$ so tisti elementi iz A, ki zadoščajo pogoju φ.

Velja $\{ x \in A \mid \varphi(x) \} \subseteq A$.

Poleg tega velja

$$\{x \in A \mid \varphi(x)\} \subseteq \{x \in A \mid \psi(x)\} \Leftrightarrow \forall x \in A . \varphi(x) \Rightarrow \psi(x)$$

Kanonična inkluzija

Za podmnožico $S \subseteq T$ definiriamo **kanonično inkluzijo** ali **kanonično vključitev** $i\_S : S \to T$, s predpisom $i\_S : x \mapsto x$ (to ni identiteta, razen v primeru $S = T$!). Oznaka i_S ni standardna, pravzaprav standardne oznake ni.

Če je $f : T \to U$ in $S \subseteq T$, pravimo kompozitumu $f \circ i\_S$ **zožitev* preslikave f na S, pišemo $f|\_S$.

Potenčna množica

Definicija potenčne množice

Za vsako množico A tvorimo množico $P(A)$, ki ji pravimo **potenčna množica**. Elementi potenčne množice $P(A)$ so natanko podmnožice množice A:

$$S \in P(A) \Leftrightarrow S \subseteq A$$

Primer: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Primer: $P(\{a,b,c\}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

Karakteristične funkcije

Karakteristična funkcija na množici A je fukcija z domeno A in kodomeno 2. Tu je $2 = \{\bot, \top\}$ množica resničnostnih vrednosti.

Eksponentna množica 2^A je torej množica vseh karakterističnih funkcij na A.

Opomba: karakteristične funkcije se uporabljajo tudi v analizi, kjer jih običajno razumemo kot preslikave $A \to \{0,1\}$ namesto $A \to \{\bot, \top\}$. Ker sta množici $\{\bot,\top\}$ in $\{0,1\}$ izomorfni, to ni bistvena razlika.

Karakteristično funkcijo si lahko predstavljamo kot preslikavo, ki opredeljuje neko lastnost elementov A: tisti elementi, ki imajo opredeljeno lastnost, se slikajo v $\top$, ostali pa v `⊥`.

Primer: preslikava $p : N \to 2$, definirana s predpisom

$$p(n) = \top, \text{ če } n \text{ je praštevilo}$$
$$p(n) = \bot, \text{ če } n \text{ ni praštevilo}$$

je karakteristična preslikava lastnosti "je praštevilo".

Izomorfizem $P(A) \cong 2^A$

Videli smo, da lahko neko lastnost elementov množice A predstavimo bodisi s podmnožico bodisi s karakteristično preslikavo. To nam da idejo, da med podmnožicami A in karakterističnimi preslikavami na A obstaja neka zveza.

Izrek: $P(A) \cong 2^A$

Dokaz. Definirajmo preslikavi

$$\chi : P(A) \to 2^A$$
$$\xi : 2^A \to P(A)$$

s predpisoma

$$\chi_S(x) := \bot \text{ če } x \notin S$$
$$\chi_S(x) := \top \text{ če } x \in S$$

in

$$\xi_f := \{x \in A \mid f(x) = \top\}.$$

Ta predpisa bi lahko krajše zapisali tudi takole:

$$\chi_S(x) := (x \in S)$$
$$\xi_f := \{x \in A \mid f(x) \}$$

Preslikavi χ_S pravimo **karakteristična funkcija podmnožice S**.

Trdimo, da sta χ in ξ inverza:

1. Dokažimo $\chi \circ \xi = id_{2^A}$. Uporabimo princip ekstenzionalnosti za preslikave. Naj bo $f \in 2^A$. Dokažimo, da je $\chi_{\xi_f} = f$. Uporabimo princip ekstenzionalnosti za preslikave. Naj bo $x \in A$:

   $\chi_{\xi_f}(x) = (x \in \xi_f) = f(x)$.

2. Dokažimo $\xi \circ \chi = id_{P(A)}$. Uporabimo princip ekstenzionalnosti za preslikave. Naj bo $S \in P(A)$. Dokažimo, da je $\xi_{\chi_S} = S$:

   $\xi_{\chi_S} = \{x \in A \mid \chi_S(x)\} = \{x \in A \mid x \in S\} = S$ □

Boolova algebra podmnožic

Podmnožice množice A tvorijo Boolovo algebro za operaciji presek $\cap$ in unija $\cup$.

Boolova algebra množic (unija, presek, komplement).

Operacija simetrična razlika $\oplus$. Potentčna množica tvori komutativno grupo za to opreacijo.