Podmnožice in potenčne množice

Osnovna relacija na množicah je $\in$ "je element".

Relacija podmnožica:

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A .\, x \in B$$

Vedno velja: $\emptyset \subseteq B$ in $B \subseteq B$.

Princip ekstenzionalnosti: $\in ?$

$$\begin{aligned} A = B &\iff \forall x .\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ &\iff (\forall x \in A .\, x \in B) \wedge (\forall y \in B .\, y \in A) \\ &\iff A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A \end{aligned}$$

Primer: $P = \{ n \in \mathbb{N} \mid \forall k, m \in \mathbb{N} .\, n \neq (k+2)\cdot(m+2) \}$

"tisti $n \in \mathbb{N}$, ki zadoščajo pogoju"

$n \in \mathbb{N} \mid n = 0$ ali $n = 1$ ali n je praštevilo

Zapis

$$\{ x \in A \mid \varphi(x) \} \qquad \text{tudi} \quad \{ x \in A \,;\, \varphi(x) \}$$

določa podmnožico množice A, tistih elementov $x \in A$, ki zadoščajo pogoju $\varphi(x)$. V tem zapisu je x vezana spremenljivka.

Logično pravilo za podmnožice

$$a \in \{ x \in A \mid \varphi(x) \} \iff a \in A \wedge \varphi(a)$$

Primer:

$$7 \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 8\} \Leftrightarrow 7 \in \mathbb{N} \wedge 7 \geq 8$$
$$\Leftrightarrow \top \wedge \bot$$
$$\Leftrightarrow \bot$$

Računski pravili:

$$\left(\forall a \in \{x \in A \mid \varphi(x)\} .\ \psi(a)\right) \Leftrightarrow \forall a \in A .\ (\varphi(a) \Rightarrow \psi(a))$$

TO NI $\forall a \in A .\ (\varphi(a) \wedge \psi(a))$!!

$$\left(\exists a \in \{x \in A \mid \varphi(x)\} .\ \psi(a)\right) \Leftrightarrow \exists a \in A .\ (\varphi(a) \wedge \psi(a))$$

Primer:

$$\underset{\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq a \wedge a \leq 1\}}{\forall a \in [0,1]} .\ f(a) \leq M \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{\forall a \in \mathbb{R} .\ 0 \leq a \wedge a \leq 1 \wedge f(a) \leq M}$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} .\ 0 \leq a \wedge a \leq 1 \Rightarrow f(a) \leq M$$

Primer:

$$\{x \in A \mid \top\} = A$$
$$\{x \in A \mid \bot\} = \emptyset$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid \underset{7+5+x-x=8}{7+5=8}\} = \emptyset$$

<u>Kanonična inkluzija</u>:

Če imamo $S \subseteq T$, <u>kanonična inkluzija</u> ali <u>vključitev</u>

$$i_S : S \to T \qquad i_S(x) = x$$
$$x \mapsto x$$

<u>Zožitev preslikave</u>: $S \subseteq T$ in $f : T \to U$

<u>Zožitev</u> f na S je preslikava

$$f|_S : S \longrightarrow U$$
$$x \longmapsto f(x)$$

$$f|_S = f \circ i_S$$

$$\begin{array}{ccccc} S & \xhookrightarrow{i_S} & T & \xrightarrow{f} & U \\ x & \xmapsto{i_S} & x & \xmapsto{f} & f(x) \end{array}$$

Potenčna množica

<u>Konstrukcija</u>: <u>Potenčna množica</u> $P(A)$ množice A je množica vseh podmnožic množice A:

$$S \in P(A) \iff S \subseteq A$$

<u>Primer</u>: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(\{a,b,c\}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

<u>Karakteristična funkcija</u> na množici A je funkcija z domeno A in kodomeno $2 = \{\bot, \top\}$. Se pravi, element množice 2^A.

$$f : A \longrightarrow 2$$

<u>Izrek</u>: $P(A) \cong 2^A$.

Dokaz:

χ

Definiramo preslikavi

$\chi : P(A) \to 2^A$

$S \mapsto \left(a \mapsto \begin{cases} \top, & a \in S \\ \bot, & a \notin S \end{cases}\right)$

Tudi: $\chi_S(a) = \begin{cases} \top & , a \in S \\ \bot & , a \notin S \end{cases}$

$\xi : 2^A \to P(A)$

$\cancel{\chi_S \mapsto S}$

$g \mapsto \{x \in A \mid g(x) = \top\}$

$\{x \in A \mid g(x)\}$

Tudi: $\xi(g) = \{x \in A \mid g(x)\}$

Tudi:

$\chi(S)(a) = \chi_S(a) = (a \in S)$

Preverimo:

(1) $\chi \circ \xi = id_{2^A}$

doma

(2) $\xi \circ \chi = id_{P(A)}$

$\iff \forall g \in 2^A.\ (\chi \circ \xi)(g) = g$ (ekstenzionalnost funkcij)

| $h = \ell \quad h, \ell : X \to Y$
| $\forall x \in X.\ h(x) = \ell(x)$

Naj bo $g \in 2^A$. Dokažemo:

$(\chi \circ \xi)(g) = g$ (ekstenzionalnost funkcij)

$\iff \forall x \in A.\ (\chi \circ \xi)(g)(x) = g(x)$

Naj bo $x \in A$. Dokažemo:

$(\chi \circ \xi)(g)(x) = g(x)$

$(\chi \circ \xi)(g)(x) = (\chi(\xi(g)))(x) =$ } def ξ

$= (\chi(\{y \in A \mid g(y)\}))(x) =$ } def χ

$= (x \in \{y \in A \mid g(y)\})$ } def podmnožice

$= (x \in A \wedge g(x))$

$= (\top \wedge g(x)) = g(x)$ ✓

Boolova algebra $P(A)$

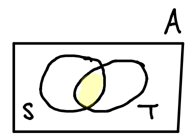
Boolova algebra $2 = \{\bot, \top\}$ operacije $\bot, \top, \wedge, \vee, \neg$

($P \Rightarrow Q$ izrazimo kot $\neg P \vee Q$)

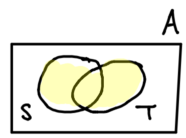
Pravila (glej prejšnja predavanja)

Množica $P(A)$ tvori Boolovo algebro z operacijami $\emptyset, A, \cap, \cup, (\,)^c$

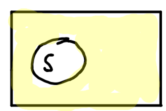
$$S \cap T = \{ x \in A \mid x \in S \wedge x \in T \}$$



$$S \cup T = \{ x \in A \mid x \in S \vee x \in T \}$$

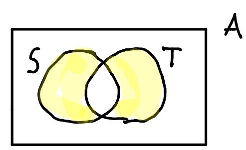


$$S^c = \{ x \in A \mid \neg (x \in S) \}$$



Simetrična razlika:

$$S \oplus T = \{ x \in A \mid \underbrace{(x \in S) \Leftrightarrow (x \notin T)}_{\neg (x \in S \Leftrightarrow x \in T)} \}$$

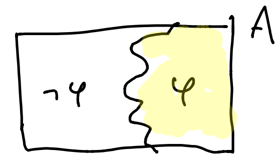


$$= \{ x \in A \mid x \in S \veebar x \in T \}$$

Razmislek $P(A)$ je abelova grupa za operacijo $\oplus$.

Razredi & družine

Podmnožica: $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$



Ideja: $\{x \mid \varphi(x)\}$ množica vseh matematičnih objektov, ki zadoščajo pogoju φ

ZELO DOBRA A PARADOKSALNA IDEJA!

$$a \in \{x \mid \varphi(x)\} \iff \varphi(a)$$

Russellov paradoks:

Definirajmo $R := \{S \mid S \notin S\}$

Ali je $R \in R$?

(1) Dokažimo $R \notin R$:

Predpostavimo $R \in R$. Iščemo protislovje:

Iz $R \in R = \{S \mid S \notin S\}$ sledi $R \notin R$, protislovje.

(2) Dokažimo $\neg(R \notin R)$:

Predpostavimo $R \notin R$. Iščemo protislovje.

R zadošča pogoju iz definicije R, torej $R \in R$, protislovje.

Protislovje med (1) in (2). Dokazali smo $\bot$!

Matematika je uničena!

Množice in razredi

Imamo tri vrste matematičnih objektov:

1. Osnovni objekti (števila, točke v ravnini), urelementi
2. Zbirke objektov, ki se imenujejo množice.
3. Zbirke objektov, ki se imenujejo razredi.

Pravila:

- Elementi množic so urelementi in množice.
- Elementi razredov so urelementi in množice.

Poanta: Množica je lahko element (druge množice ali razreda), Razred ne more biti element.

V zapisu

$$X \in Y$$

urelement ali množica

množica ali razred

Razrede tvorimo z zapisom:

$$\{ x \mid \varphi(x) \}$$

razred vseh x, ki zadoščajo pogoju $\varphi(x)$.

Množice tvorimo z konstrukcijami kot so $A \times B$, B^A, $P(A)$, $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$, ...

Russellov razred:

$$R := \{ S \mid S \notin S \}$$

razred vseh S-jev, ki ne vsebujejo samega sebe?

Ali je $R \in R$? NEVELJAVNO VPRAŠANJE!

Družine množic

Razred vseh množic $V := \{ S \mid S \text{ je množica} \}$

Druga oznaka: $\mathrm{Set} := \{ S \mid S \text{ je množica} \}$

<u>Definicija</u>: <u>Družina množic</u> je preslikava $I \to \mathrm{Set}$, kjer je I množica, pravimo ji <u>indeksna</u> množica.

<u>Primeri</u>:

(1) Družina

$A_1 = \{1,2\}$

$A_2 = \{a,b,c\}$

$A_3 = \dots$

$A_4 = \dots$

$A_5 = \dots$

$$A : \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \mathrm{Set}$$
$$i \longmapsto \dots$$