Pravila uporabe:

- konjunkcija:

  Vemo $A \wedge B$.

  Torej vemo A.

  Torej vemo B.

- disjunkcija:

  Vemo $A \vee B$.

  Dokazujemo C.

  Obravnavamo primera:

  1. Predpostavimo A: dokazujemo C.
  2. Predpostavimo B: dokazujemo C.

Primer:

Dokazujemo $|x-4| \geq 0$.

Vemo: $x-4 \geq 0$ ali $x-4 \leq 0$.

1. Če je $x-4 \geq 0$:

   $|x-4| = x-4 \geq 0$ ✓

2. Če je $x-4 \leq 0$:

   $|x-4| = -(x-4) \geq 0$ ✓

- resnica: Vemo $\top$. Taka predpostavka ni uporabna.

- neresnica:

  Vemo $\bot$.

  Dokazujemo C.

  To je res, ker iz neresnice sledi karkoli.

- implikacija:

  Vemo $A \Rightarrow B$.

  Dokažemo A:

  $\boxed{\text{dokaz } A}$

  Ker vemo $A \Rightarrow B$ in vemo A, vemo tudi B.

  modus ponens

- univerzalni kvantifikator:

  Vemo $\forall x \in A . \varphi(x)$.
  Vemo $a \in A$.
  Tedaj vemo tudi $\varphi(a)$.

- eksistenčni kvantifikator:

  Vemo $\exists x \in A . \varphi(x)$.
  Dokazujemo C.

  - Izberemo spremenljivko, ki je še nismo uporabili, na primer z (lahko je x, če je "svež"), predvsem pazi, da se ne pojavi v C.

  Naj bo $z \in A$. Predpostavimo $\varphi(z)$.
  Dokažemo C:

  $\boxed{\text{dokaz } C}$ ← tu lahko uporabljamo z in $\varphi(z)$.

<u>Protiprimer:</u>

Dokazujemo $(\exists x \in \mathbb{R} . x < 1) \land (\exists x \in \mathbb{R} . x > 2) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} . x < 1 \land x > 2$.

Dokaz:

Predpostavimo $\exists x \in \mathbb{R} . x < 1$. (1)
Predpostavimo $\exists x \in \mathbb{R} . x > 2$. (2)

Dokazujemo: $\exists x \in \mathbb{R} . x < 1 \land x > 2$.

Uporabimo (1): Naj bo $x \in \mathbb{R}$ (3). Predpostavimo $x < 1$ (4).
Uporabimo (2): Naj bo $x \in \mathbb{R}$ (5). Predpostavimo $x > 2$ (6).

Vzemimo $x := x$. Preverimo $x \in \mathbb{R}$ ✓ po (3).

Preverimo $\underset{(4)}{\underset{✓}{x < 1}} \land \underset{(6)}{\underset{✓}{x > 2}}$ $\square$

<u>Pravilno</u>:

$$(\exists x \in \mathbb{R}.\, x < 1) \land (\exists x \in \mathbb{R}.\, x > 2) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}.\, x < 1 \land x > 2.$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}.\, x < 1) \land (\exists c \in \mathbb{R}.\, c > 2) \Rightarrow \exists \text{✿} \in \mathbb{R}.\, \text{✿} < 1 \land \text{✿} > 2.$$

Dokaz:

Predp. $(\exists x \in \mathbb{R}.\, x < 1)$ (1)

Predp $(\exists c \in \mathbb{R}.\, c > 2)$ (2)

Dok: $\exists \text{✿} \in \mathbb{R}.\, \text{✿} < 1 \land \text{✿} > 2.$

Uporabimo (1):

Naj bo $x \in \mathbb{R}$. Predp. $x < 1$

Uporabimo (2):

Naj bo $c \in \mathbb{R}$. Predp. $c > 2$.

Vzemimo $\text{✿} := ?$

<u>Pravila zamenjave</u>:

- Če velja $A \Leftrightarrow B$, potem smemo v dokazu A zamenjati z B.
- Če velja $a = b$, potem smemo a zamenjati z b.

Boolova algebra

Vsaka izjava ima resničnostno vrednost.
Resničnostni vrednosti sta $\perp$ (neresnica) in $\top$ (resnica).

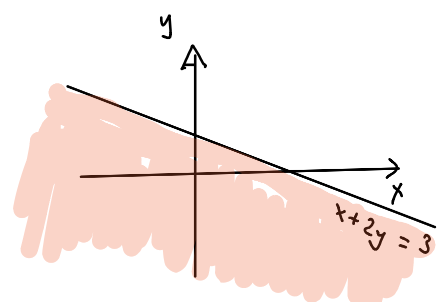
Če v izjavi nastopajo spremenljivke, je njena resničnostna vrednost odvisna od vrednosti spremenljivk. (Spremenljivkam pravimo tudi parametri)

Resničnostna tabela : $x, y \in \mathbb{N}$

x	y	$x + 2y < 3$
0	0	$\top$
0	1	$\top$
1	0	$\top$
1	1	$\perp$
2	0	$\top$
0	2	$\perp$
⋮	⋮	⋮

Ta tabela je neskončna

Primer: $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x + 2y < 3$



Spremenljivka, ki zavzame vrednosti $\bot$ in $\top$ je <u>izjavna</u> spremenljivka ali <u>izjavni simbol</u>.

<u>Primer:</u> $A \vee B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ izjavna simbola A in B

$x : \mathbb{R}$, $A \Rightarrow x + 3 < 5$ izjavni simbol A, x spremenljivka

<u>Izjavni račun:</u> logične formule, ki sestojijo iz

- izjavnih simbolov
- konstant $\bot$ in $\top$
- $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (ni $\exists, \forall$!)

<u>Predikatni račun:</u> izjavni račun + spremenljivke + $\forall, \exists$ + relacijski in funkcijski simboli

$+, -, \sin$

$\leq, <, =$

Definiramo: $2 := \{\bot, \top\}$

Izjava $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ v kateri nastopajo izjavni simboli $p_1, \ldots, p_n$ določa preslikavo

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n} \longrightarrow 2$$

$$(p_1, \ldots, p_n) \longmapsto \varphi(p_1, \ldots, p_n)$$

<u>Boolova preslikava</u>

$2^n \to 2$

$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

<u>Primer:</u>

$$2 \times 2 \times 2 \longrightarrow 2$$

$$(p, q, r) \longmapsto (p \vee \neg q \Rightarrow r)$$

Resničnostna tabela poda Boolovo preslikavo v tabelarični obliki

p	q	r	$p \vee \neg q \Rightarrow r$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\vdots$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\vdots$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\vdots$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\vdots$
$\top$	$\top$	$\top$	$\vdots$

Definicija: Izjava je **tavtologija**, če je resnična, ne glede na vrednosti parametrov.

Tavtologija ima v resničnostni tabeli v vseh vrsticah $\top$.

Izrek: Izjava je tavtologija natanko tedaj, ko ima dokaz.

Dokaz: N. Prijatelj: Osn. mat. logike 1. $\blacksquare$

$\neg(p \Rightarrow q)$

p	q	$p \wedge \neg q$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$

Polni nabor: nabor logičnih veznikov, s pomočjo katerih lahko dobimo vse resničnostne tabele

Primer: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, \bot, \top$

Primer: $\top, \wedge, \neg$

$\bot \Leftrightarrow \neg\top$

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$\vdots$

p	q	?
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$

Disjunktivna oblika:

$$\underbrace{(\neg p \wedge \neg q)}_{\text{1. vrstica}} \vee \underbrace{(\neg p \wedge q)}_{\text{2. vrstica}}$$

Konjunktivna oblika:

$$\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

3. vrstica 4. vrstica

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

Boolova algebra:

$\Leftrightarrow$ obravnavamo kot enakost (ker upoštevamo le resničnostne vrednosti, ne pa tudi pomen)

Pravila za ⊤ in ⊥

- `⊤ ∨ p = ⊤` (⊤ absorbira ∨)
- `⊤ ∧ p = p` (⊤ je nevtralni element za ∧)
- `¬ ⊤ = ⊥`
- `⊥ ∧ p = ⊥` (⊥ absorbira ∧)
- `⊥ ∨ p = p` (⊥ je nevtralni element za ∧)
- `¬⊥ = ⊤`

Pravila za negacijo ¬

- `¬¬p = p` (negacija je involucija)
- de Morganovi pravili:
  - `¬(p ∧ q) = ¬p ∨ ¬q`
  - `¬(p ∨ q) = ¬p ∧ ¬q`

Pravila za konjukcijo in disjunkcijo

- $p \land q = q \land p$ (konjunkcija je komutativna)
- $p \land p = p$ (konjunkcija je idempotentna)
- $(p \land q) \land r = p \land (q \land r)$ (konjunkcija je asociativna)
- $p \lor q = q \lor p$ (disjunkcija je komutativna)
- $p \lor p = p$ (disjunkcija je idempotentna)
- $(p \lor q) \lor r = p \lor (q \lor r)$ (disjunkcija je asociativna)

Absorbcijski pravili:

- $p \land (p \lor q) = p$
- $p \lor (p \land q) = p$

Distributivnostni pravili:

- $p \land (q \lor r) = (p \land q) \lor (p \land r)$
- $p \lor (q \land r) = (p \lor q) \land (p \lor r)$

$x \cdot (y+z) = xy + xz$

$x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$

$-(xy - z) = -xy + z$

Ostala pravila

- $p \lor \neg p = \top$ (izključena tretja možnost)
- $p \land \neg p = \bot$
- $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- $(p \Rightarrow q) = \neg q \lor p$